



UNIVERSITY OF TRENTO - Italy

---

Department of Civil, Environmental  
and Mechanical Engineering

***Corso di “Costruzioni idrauliche”***

**Relazione pluviometrica**

Docente

Prof. Riccardo Rigon

Studenti

Carravieri Gianluca      Matr. 174309

Morelli Luca              Matr. 174531

Zannin Jacopo            Matr. 168526

Trento, maggio 2015

## Sommario

Premessa .....	3
1 Inquadramento geografico.....	3
1.1 Clima .....	3
2 Precipitazioni orarie .....	5
2.1 Dati pluviometrici.....	5
2.1.1 Verifica della coerenza delle misure (affidabilità) .....	6
2.1.2 Distribuzioni.....	7
2.1.3 Curve di possibilità pluviometrica –LSPP-.....	8
2.1.4 Metodo dei momenti.....	9
2.1.5 Metodo dei minimi quadrati .....	9
2.1.6 Metodo della massima verosimiglianza .....	10
2.1.7 Test di Pearson .....	11
2.1.8 Costruzione LSPP .....	12
2.2 Risultati .....	13
2.2.1 Curve di Gumbel per la durata di 1 ora .....	13
2.2.2 Curve di Gumbel per la durata di 3 ore .....	14
2.2.3 Curve di Gumbel per la durata di 6 ore .....	14
2.2.4 Curve di Gumbel per la durata di 12 ore .....	15
2.2.5 Curve di Gumbel per la durata di 24 ore .....	15
2.2.6 Curve di Gumbel ottimali.....	16
2.2.7 LSPP lineari .....	17
2.2.8 LSPP logaritmiche .....	17
3 Scrosci.....	18
3.1 Dati pluviometrici.....	18
3.1.1 Verifica della coerenza delle misure.....	19
3.1.2 Distribuzioni.....	20
3.1.3 Stima dei parametri – Test di Pearson.....	20
3.1.4 LSPP .....	21
3.2 Risultati .....	22
3.2.1 Curve di Gumbel per la durata di 15 min.....	22
3.2.2 Curve di Gumbel per la durata di 30 min.....	22
3.2.3 Curve di Gumbel per la durata di 45 min.....	23
3.2.4 Curve di Gumbel ottimali.....	24
3.2.5 LSPP lineari .....	25
3.2.6 LSPP logaritmiche .....	25

## Premessa

Lo scopo di questo documento è la creazione e lo studio delle curve di possibilità pluviometrica. Tali curve, dette anche LSPP esprimono la relazione tra l'altezza di precipitazione e la relativa durata, per ogni tempo di ritorno.

Tutti i dati che saranno in seguito riportati sono stati scaricati e sono disponibili sul sito [www.meteotrentino.it](http://www.meteotrentino.it). L'elaborazione è stata effettuata mediante l'ausilio di *Microsoft Excel* e del software open source per analisi statistica *R Studio*.

## 1 Inquadramento geografico

La stazione di riferimento da cui provengono i dati utilizzati per questa analisi è situata nel comune di Trento. La città di Trento (capoluogo dell'omonima provincia) si trova al centro di una larga valle attraversata dal fiume Adige. La stazione meteorologica è denominata T0129 Trento (Laste). Tale stazione è tutt'ora in attività.

DETTAGLI STAZIONE	
Stazione	T0129
Tavoletta n.	32060100
Coordinate est/nord	665153/5104248
Latitudine	46°04'18.7" N
Longitudine	11°08'08.4" E
Note	ATTIVA - M – Palo vento 5 m

### 1.1 Clima

Il clima presenta estati calde ed inverni con temperature rigide e possibilità di precipitazioni nevose. Si suppone quindi che il pluviometro sia di tipo riscaldato in modo da poter fornire dei dati significativi per quanto concerne le precipitazioni solide espressi come corrispettivo in acqua della neve.

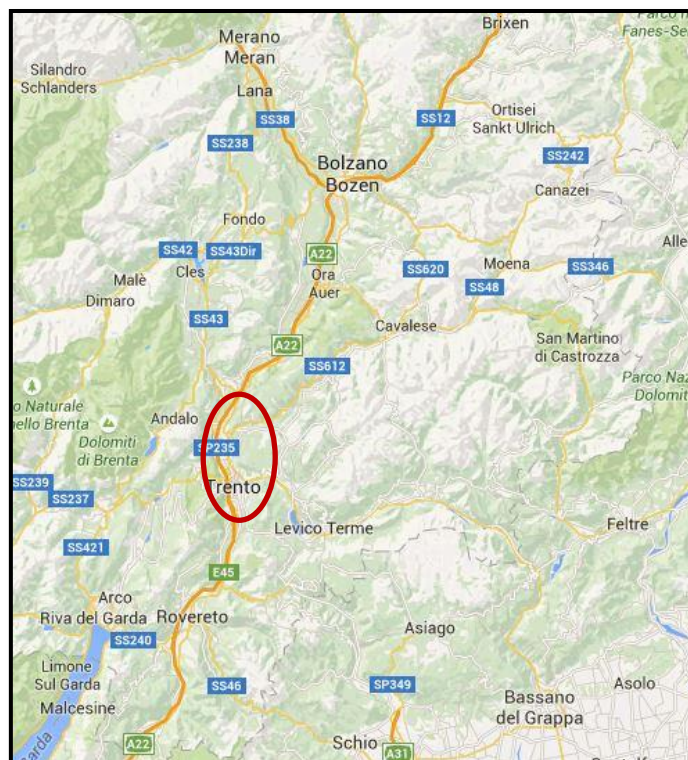


Figura 1: Inquadramento geografico

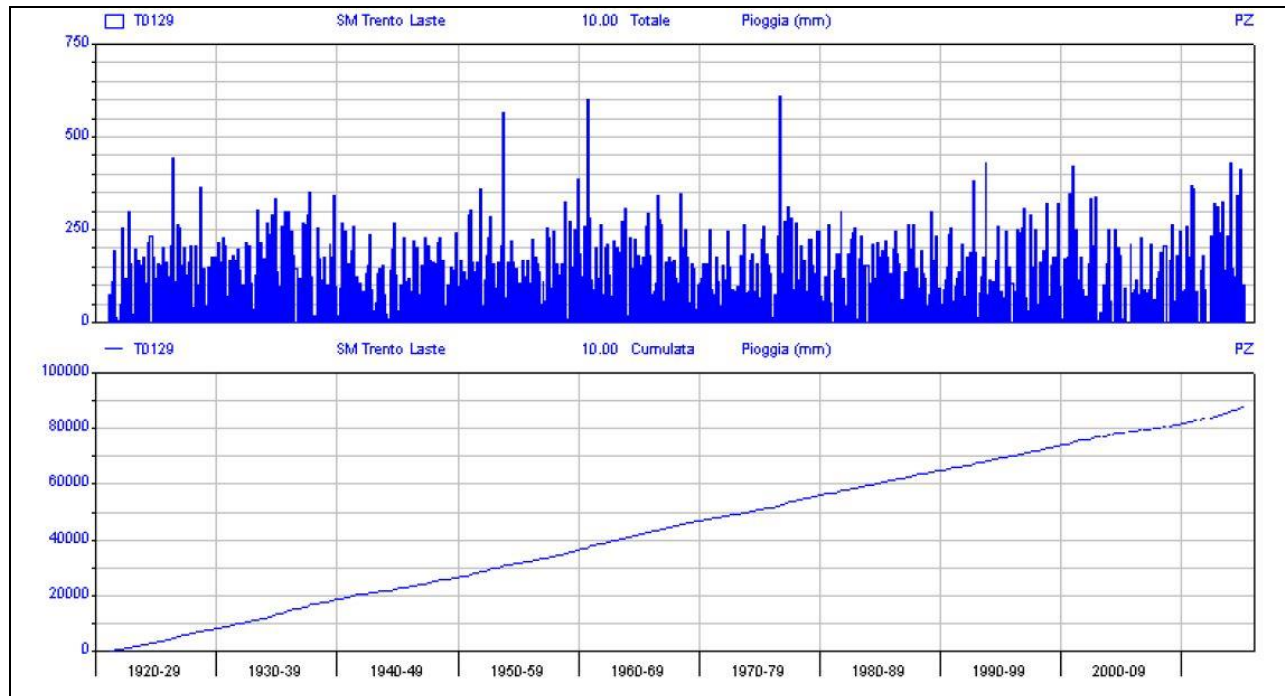


Figura 2: Storico precipitazioni stazione Trento (Laste)

## 2 Precipitazioni orarie

### 2.1 Dati pluviometrici

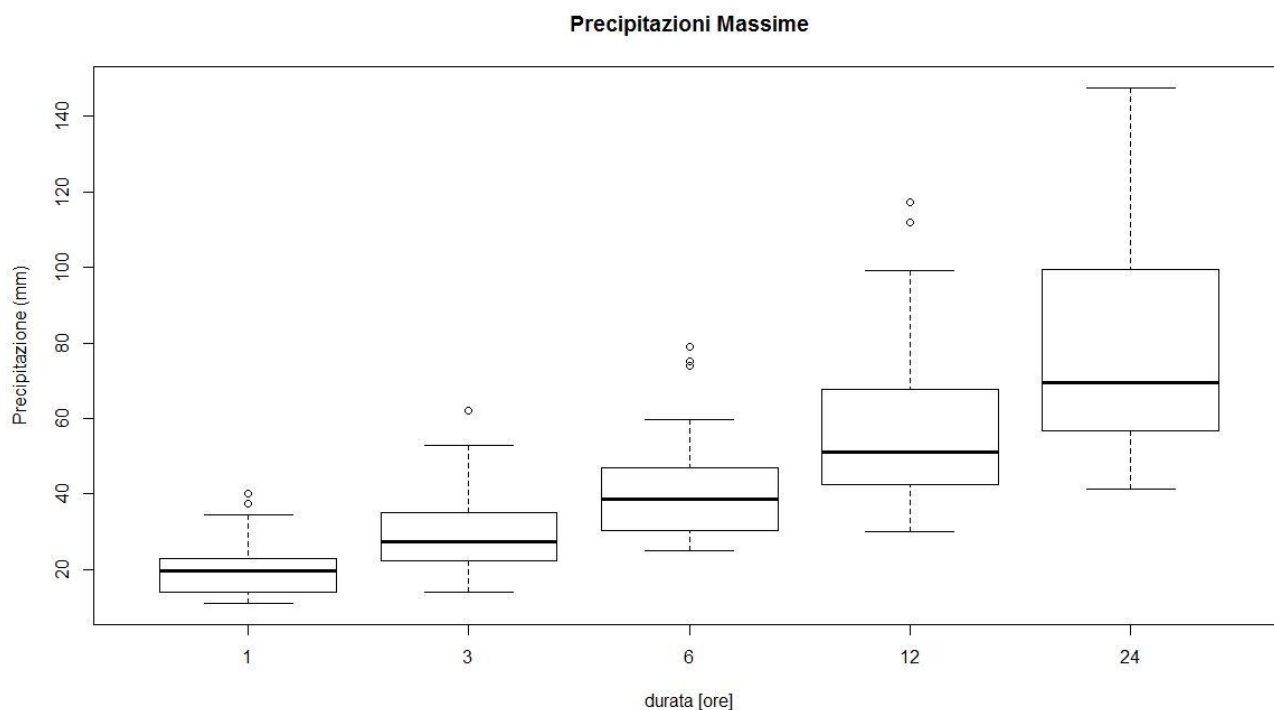
Al fine di svolgere questa analisi sono stati reperiti i dati delle precipitazioni estreme, cioè le massime registrate, su intervalli temporali di 1, 3, 6, 12, 24 ore. I dati disponibili vanno dal 1951 fino al 1990. Dopo tale anno i dati non sono disponibili.

Anno	1 ora	3 ore	6 ore	12 ore	24 ore
1951	40	62	79	99	116,4
1952	26,6	30	43	58,6	95,6
1953	16,8	32,8	40,4	67	104,6
1954	13,4	29	29,8	41	49
1955	12,8	16	25	38,4	47,6
1956	11	20,6	26	43	56,8
1957	20,8	23,6	27,2	35,8	64,6
1958	16,8	21	33,2	38	55,6
1959	20,4	26	47,2	68,4	109,6
1960	22,8	46,2	59,8	80,8	96,8
1961	23	30,2	38,6	52,4	69,6
1962	29	43	54,8	56,2	59,2
1963	20	26	28,6	43,6	55,4
1964	12,6	18,6	31,6	50	74,6
1965	14,2	22	42,6	61,6	113
1966	19	31	51	81,4	125,6
1967	12,6	14	26	37,4	44,4
1968	22,2	31,2	44,2	44,6	67,4
1969	19,4	38,2	38,8	65,6	77,2
1970	22,4	34,6	46,4	51,6	69,8
1971	17	21,8	27,8	40	73,6
1972	16,8	24,4	30,8	51,4	71,6
1973	32,8	33	34,8	42	56
1974	17	25,6	44,2	50	NA
1975	14	18,2	27	30	51
1976	21	44,2	74	112	147,6
1977	13,8	20,2	33,6	46,4	54
1978	21,6	22,6	26	40	66
1979	21	28	39	73,8	102
1980	26	41,4	57,8	86,8	106,8
1981	13,4	23,2	28,8	47,4	91
1982	26,2	27,4	36	51	60,4
1983	24,2	38,6	55,8	70,2	71,2
1984	13,8	18,6	37,6	39,2	41,4

<b>1985</b>	37,4	52,8	52,8	62,4	67,8
<b>1986</b>	12,8	22,8	44	80,2	120,8
<b>1987</b>	19,8	27,2	39,4	63,2	68,6
<b>1988</b>	14,4	22,4	38	48,6	56,8
<b>1989</b>	34,4	35,4	36	44	57,6
<b>1990</b>	18,4	46,2	75,2	117,2	121,2

### 2.1.1 Verifica della coerenza delle misure (affidabilità)

Le misure pluviometriche sono affette da errori di misura di varia natura. Nel caso in esame, sicuramente sono presenti errori relativi alla strumentazione utilizzata (errori strumentali). Per questo è necessario verificare che l'altezza di precipitazione per ogni anno sia crescente al crescere delle durate. Sono ammissibili, comunque, altezze uguali per durate successive.



**Figura 3: Boxplot**

Nel grafico sopra riportato, sull'asse delle ascisse sono inserite le serie temporali di dati, mentre sull'asse delle ordinate sono indicate le altezze delle precipitazioni estreme.

La linea in grassetto rappresenta la mediana, i limiti superiore ed inferiore di ogni box indicano il primo e il terzo quantile, mentre la distanza tra i baffi inferiore e superiore è rappresentativa della varianza.

Si noti che, al crescere della durata, la mediana cresce, come ci si aspettava. La verifica risulta quindi soddisfatta. L'aumento della dimensione dei baffi definisce un aumento della varianza, probabilmente dovuta alla presenza di errori nelle misure. Inoltre, nelle serie di 1, 3, 6 e 12 ore sono presenti dei valori

esterni ai baffi, contrassegnati da un simbolo circolare bianco. Tali risultati sono denominati *out layer* e probabilmente sono riferiti ad errori grossolani.

### 2.1.2 Distribuzioni

Di seguito sono riportati dei diagrammi delle frequenze (istogrammi) con cui si presentano gli eventi di precipitazione a parità di durata.

Sono dunque rappresentati cinque istogrammi, uno per ogni durata di evento, che riportano in ascissa le altezze di precipitazione ed in ordinata le rispettive frequenze.

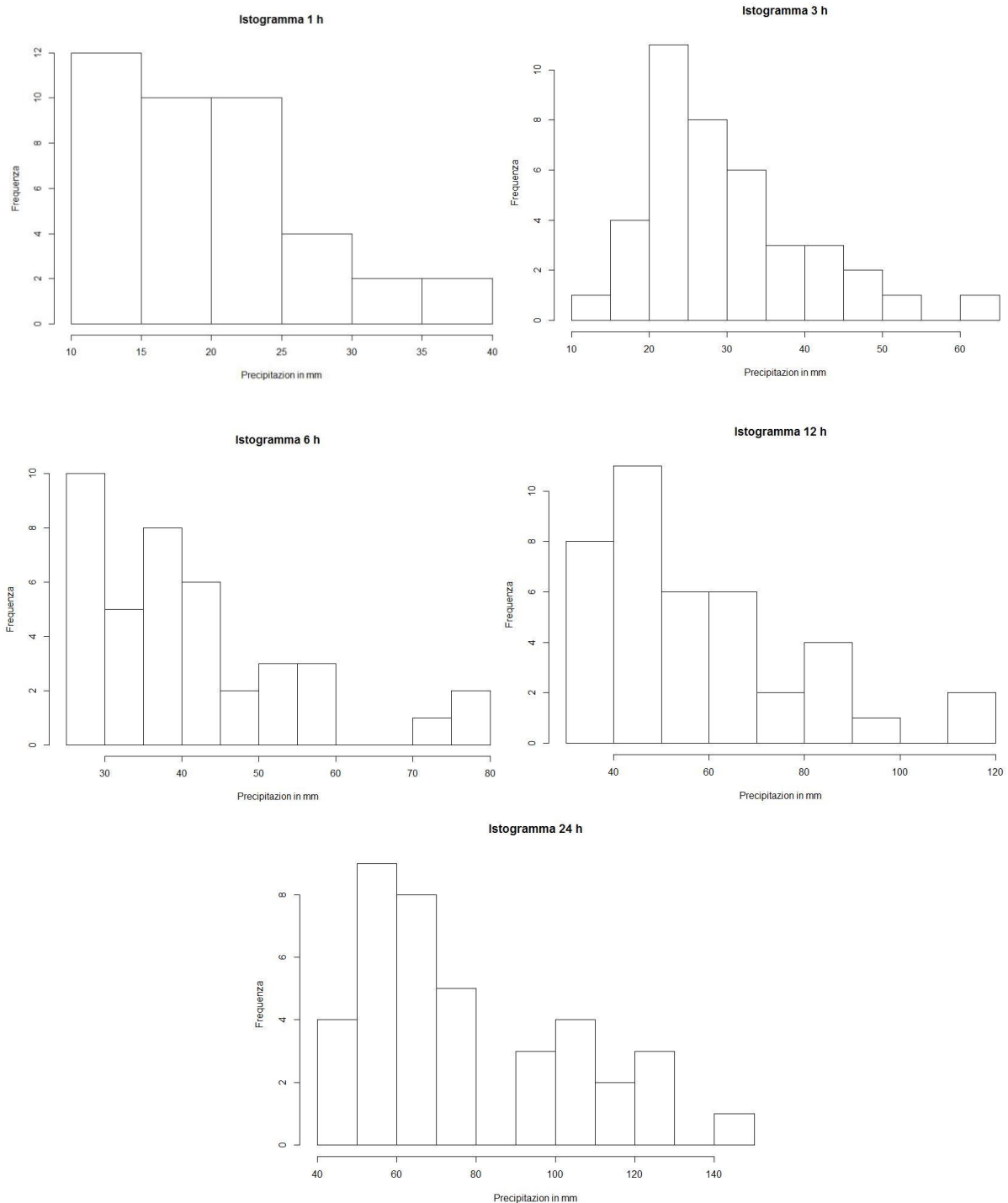


Figura 4: Istogrammi

### 2.1.3 Curve di possibilità pluviometrica –LSPP-

Una curva di possibilità pluviometrica rappresenta la relazione che intercorre tra la durata di precipitazione e la sua altezza massima per un dato tempo di ritorno ( $T_R$ ) dell'evento. Utilizzando un piano logaritmico si ottiene una retta. Il tempo di ritorno definisce un intervallo di tempo in cui una precipitazione di una data intensità si ripete oppure è superata.

In linea generale, le LSPP sono rappresentate da una espressione del tipo:

$$h(tp, T_R) = a(T_R) * tp^n$$

con:

- h: altezza di precipitazione;
- t: durata
- a, n: coefficienti costanti.

Al fine di determinare le LSPP è necessario calcolare la probabilità di non superamento –CDF- di ogni altezza di precipitazione per ogni durata. Una volta nota una serie di dati empirici si procede fittando tali dati su una curva analitica. Si utilizza una famiglia di curve dette GEV –General Extreme Value- che definisce una particolare distribuzione dei massimi di precipitazione appartenenti ad un campione di una certa numerosità. La distribuzione sarà del tipo:

$$P(H < h) = e^{-(1+\xi*\frac{h-a}{b})^{\frac{-1}{\xi}}}$$

con:

- $\xi$ : parametro di forma;
- a: parametro di posizione;
- b: parametro di scala.

Si possono distinguere tre casi limite, denominati le distribuzioni di:

- Gumbel:  $\xi = 0$
- Frechét:  $\xi > 0$
- Weibull:  $\xi < 0$

In questa analisi, si procede facendo uso della distribuzione di Gumbel nella seguente forma:

$$P(H < h) = e^{-e^{-\frac{h-a}{b}}}$$

Risulta necessario quindi determinare i due parametri di forma e di scala, a e b. A tale scopo si ricorre all'uso di tre metodi di adattamento dei parametri:

- Metodo dei momenti
- Metodo dei minimi quadrati
- Metodo della massima verosimiglianza (maximum likelihood)

Successivamente bisognerà individuare la coppia di parametri più adatta facendo ricorso al test di Pearson al fine di ottenere la miglior curva di Gumbel.



Per effettuare tali operazioni si utilizza il software open source R. Si veda lo script allegato.

### 2.1.4 Metodo dei momenti

Questo metodo prevede l'uguaglianza degli stimatori dei momenti dei dati sperimentali con i momenti di una popolazione distribuita secondo Gumbel. Uguagliando, quindi, i momenti di primo e secondo ordine si avranno solamente due parametri liberi. Sarà necessario un sistema di due equazioni in due incognite del tipo:

$$\begin{cases} \mu = b * \gamma + a \\ \sigma^2 = \frac{b^2 * \pi^2}{6} \end{cases}$$

con:

- $\gamma \cong 0.577216$ , costante Eulero-Mascheroni.

Di seguito di inserisce una parte di codice in R che rappresenta l'utilizzo di questo metodo:

```
# Metodo dei momenti
|
# Caricare pacchetto evd
# Calcolo media e varianza
m1h <- mean(data1h)
v1h <- var(data1h)
# Fattore di scala
b1.gumbel <- sqrt(v1h)*sqrt(6)/pi
b1.gumbel
b.gumbel <- function(datah){sqrt(var(datah))*sqrt(6)/pi}
b.gumbel(data1h)
# Fattore di localizzazione, con 0.5772156649 = numero di Eulero-Mascheroni
a.gumbel <- function(datah,b){mean(datah)-b*0.5772156649}
a.gumbel(data1h,b1.gumbel) -> a1.gumbel
a.gumbel(data1h,b1.gumbel)
# Disegno curva Gumbel (per ordinare i dati si usa il comand sort)
z <- sort(data1h)
plot(z,pgumbel(z,loc=a1.gumbel,scale=b1.gumbel),type="l",col="red",xlab="h[mm]",ylab="P(H<h)", main="Frequenza di non superamento 1 h")
```

Figura 5: Script metodo dei momenti

### 2.1.5 Metodo dei minimi quadrati

Si procede calcolando la funzione empirica di distribuzione cumulata –ECDF, Empirical Cumulative Distribution Curve- sulla distribuzione teorica di Gumbel, e la funzione di non superamento di una popolazione distribuita secondo Gumbel.

Si calcola poi lo scarto quadratico tra le due:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^N (ECDF_i - P(H < h_i))^2$$

Lo scarto quadratico viene minimizzato imponendo che la derivata parziale rispetto ad ogni parametro sia uguale a zero:

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial \theta_j} = 0 \text{ per } j = 1,2$$

con:

- $\theta_j$ : parametri della distribuzione di Gumbel.

Il sistema di due equazioni appena descritto risulta non lineare. Pertanto si è preferito linearizzarlo in *R* applicando il metodo dei minimi quadrati su una funzione linearizzata grazie al doppio logaritmo.

```
# Minimi quadrati

# Doppio logaritmo dei dati
ecdf(data1h) -> F
F(sort(data1h))
# Il minore ha probab 1/40 (la serie è composta da 40 dati), il maggiore 1
-log(-log(F(sort(data1h))))
# Problema: l'ultimo numero va ad infinito, è necessario eliminarlo
F(sort(data1h)[-40])
-log(-log(F(sort(data1h)[-40])))
-log(-log(F(sort(data1h)[-40]))) -> Yi
F(sort(data1h)[-length(data1h)])
-log(-log(F(sort(data1h)[-length(data1h)])))
-log(-log(F(sort(data1h)[-length(data1h)]))) -> Yi
# Interpolazione lineare
lsfit(sort(data1h)[-40],Yi) -> fts
fts$coefficients
fts$coefficients[[1]]
# Estrazione dei coefficienti
fts$coefficients[[2]]
fts$coefficients[[1]] -> d
fts$coefficients[[2]] -> m
# Si definiscono i parametri a e b di Gumbel.
b2.gumbel <- 1/m
b2.gumbel
a2.gumbel <- -d*b2.gumbel
a2.gumbel
```

Figura 6: Script metodo dei minimi quadrati

Nota:

- `ecdf()` : calcola la funzione empirica di distribuzione cumulata della serie di dati fornita in input come argomento;
- `lsfit()` : interpola con il metodo dei minimi quadrati due serie di dati in input e restituisce la retta ottenuta.
- `$coefficients`: estrae i coefficienti caratteristici della curva interpolata;

### 2.1.6 Metodo della massima verosimiglianza

La base di questo metodo è l'ipotesi che la probabilità di ottenere la serie registrata sia massima.

La probabilità di ottenere una serie di dati, supposti indipendenti, è data dal prodotto delle singole probabilità di ogni evento:

$$P(\{h_1, \dots, h_N\}) = \prod_{i=1}^N P(h_i)$$

Al fine di avere una maggiore comodità nei calcoli, viene definita la funzione log-verosimiglianza data dal logaritmo della verosimiglianza:

$$\log(P(\{h_1, \dots, h_N\})) = \log\left(\prod_{i=1}^N P(h_i)\right) = \sum_{i=1}^N \log(P(h_i))$$

Si procede minimizzando quest'ultima funzione: si pone la derivazione rispetto ad ognuno dei parametri uguale a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \log(P(\{h_1, \dots, h_N\}))}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \log(P(\{h_1, \dots, h_N\}))}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il software *R* si utilizza una funzione, denominata *fitdistr()* appartenente al pacchetto opzionale *MASS*. In input vengono richiesti una serie di dati da fittare e la e la densità a cui adattarli con una coppia di parametri di prima approssimazione. In questo caso saranno utilizzati i valori trovati con il metodo dei momenti.

Durante lo svolgimento di questa operazione, è stato riscontrato un problema in quanto la serie di dati relativa alle 24 ore presentava un valore non utilizzabile -NA-. Si è proceduto quindi con una apposita serie di comandi al fine di epurare la serie da tale valore.

```
# Metodo della massima verosimiglianza (maximum likelihood)

# caricare pacchetto MASS
library(MASS)

fitdistr(data1h, densfun=dgumbel, start=list(loc=a1.gumbel, scale=b1.gumbel)) -> mlab
mlab
mlab$estimate[[1]] -> a3.gumbel
mlab$estimate[[2]] -> b3.gumbel
a3.gumbel
b3.gumbel
```

Figura 7: Script metodo massima verosimiglianza

### 2.1.7 Test di Pearson

Allo stato attuale, si dispone quindi di tre coppie di parametri per ogni durata di precipitazione, stimate con i metodi precedentemente descritti. Il passo successivo è quindi quello di scegliere le coppie migliori. Si utilizza il test non parametrico di Pearson che prevede la valutazione della funzione  $\chi^2$  per ogni curva di distribuzione di probabilità. La coppia migliore sarà quella con il valore di  $\chi^2$  minore.

In statistica, la funzione  $\chi^2$  è utilizzata per stimare la bontà dei risultati ed ha una formulazione generale del tipo:

$$\chi^2 = \sum \frac{(Osservato - Atteso)^2}{Atteso}$$

con:

- *Osservato*: numero di osservazioni appartenenti ad un certo intervallo di probabilità;
- *Atteso*: numero di eventi appartenenti a tale intervallo sulla distribuzione di Gumbel.

Si procede suddividendo il campo di probabilità in  $k$  parti uguali. Analogamente si divide il dominio di altezze di precipitazioni in altrettante classi e si calcolano i rispettivi quantili. Quindi, si contano i valori osservati per ogni classe e si calcolano i rispettivi valori teorici secondo la distribuzione di Gumbel.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{n_j - N * (P(H < h_{j+1}) - P(H < h_j))^2}{N * (P(H < h_{j+1}) - P(H < h_j))}$$

con:

- $k$ : numero di classi;
- $N$ : numerosità del campione di osservazioni;
- $n_j$ : numero di osservazioni per ogni classe.

Al fine di effettuare il test di Pearson con  $R$ , si scrivono alcune righe di codice, che restituiscono un valore di  $\chi^2$  per ogni metodo. Si utilizzerà la coppia di valori relativa al metodo che presenta il valore di  $\chi^2$  minore.

Di seguito viene presentata una tabella riassuntiva:

	$\chi^2_{Momenti}$	$\chi^2_{Minimi\ quadrati}$	$\chi^2_{Max\ ver}$	a [LOC]	b [SCALA]
1 H	3.25	<b>1.75</b>	3.75	16.62057	5.622907
3 H	0.75	<b>0.50</b>	0.75	24.44839	8.016804
6 H	<b>0.75</b>	1.00	1.00	35.0783	10.77015
12 H	<b>0.25</b>	1.75	2.00	48.45172	16.11752
24 H	<b>3.95</b>	6.51	8.56	65.82874	20.91736

*Nota:* per calcolare i quantili di una distribuzione di Gumbel è stata utilizzata la funzione `qgumbel()` contenuta nel pacchetto `evd`.

### 2.1.8 Costruzione LSPP

La definizione di tempo di ritorno (intervallo medio in cui una precipitazione di una data intensità si ripete o è superata) è legata alla probabilità di non superamento:

$$T_R := \frac{T}{l} = \frac{N * m}{l} = \frac{m}{Fr(H > h)} = \frac{m}{1 - Fr(H < h)}$$

con:

- $T$ : intervallo temporale della serie di osservazioni;
- $l$ : numero i misure superiori ad  $h$ ;
- $m$ : tempo di campionamento;
- $Fr(H < h)$ : frequenza di non superamento di  $h$ .

Al fine di costruire la LSPP per un dato tempo di ritorno è necessario interpolare i cinque punti che rappresentano l'altezza di precipitazione per ogni durata, dato il quantile corrispondente al tempo di ritorno desiderato. Noto che i dati a disposizione sono la serie di dati tempo di campionamento unitario – una serie all'anno- e l'ECDF, il legame può essere semplificato come:

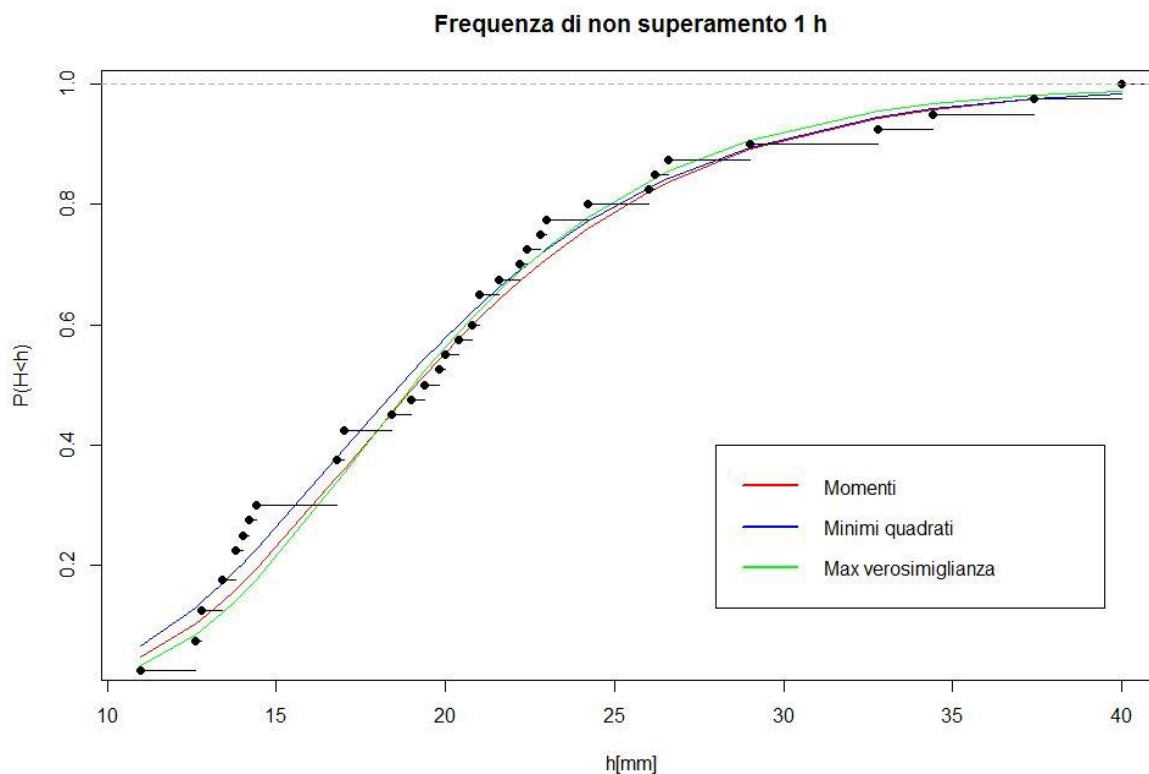
$$P(H < h) = 1 - \frac{1}{Tr}$$

in cui  $P(H < h)$  rappresenta l'ordine del quantile corrispondente a  $Tr$ .

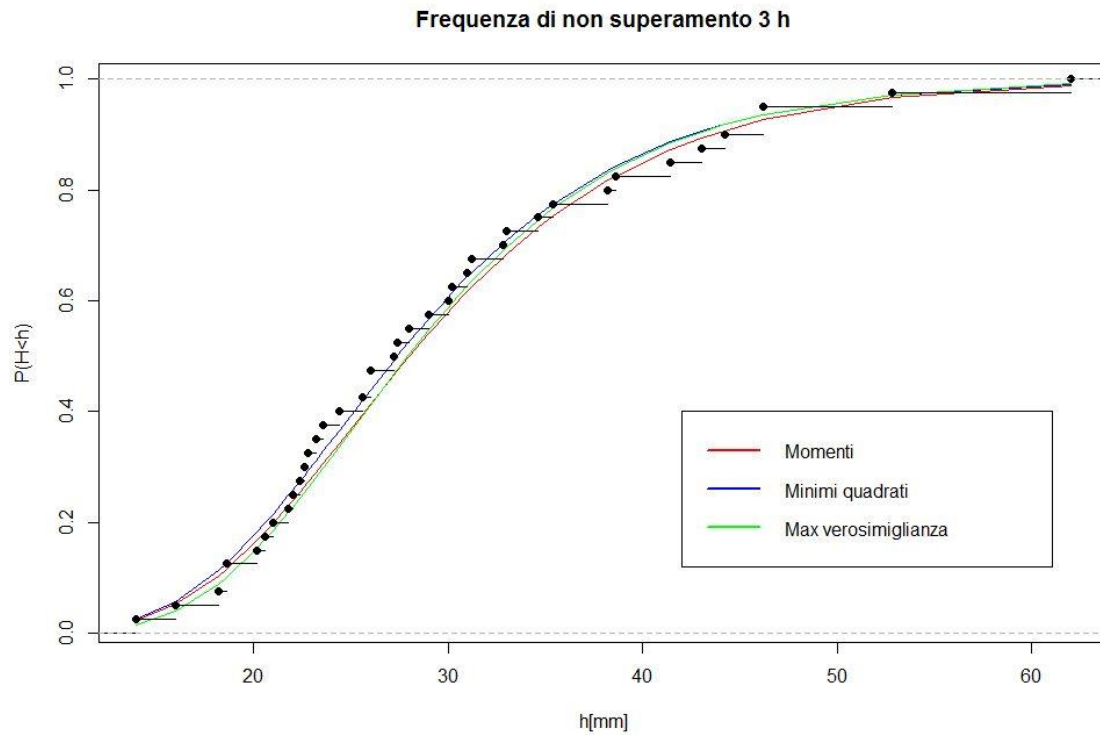
$Tr$	$a$	$n$
10	28.38	0.43
20	32.20	0.43
5	24.40	0.43

## 2.2 Risultati

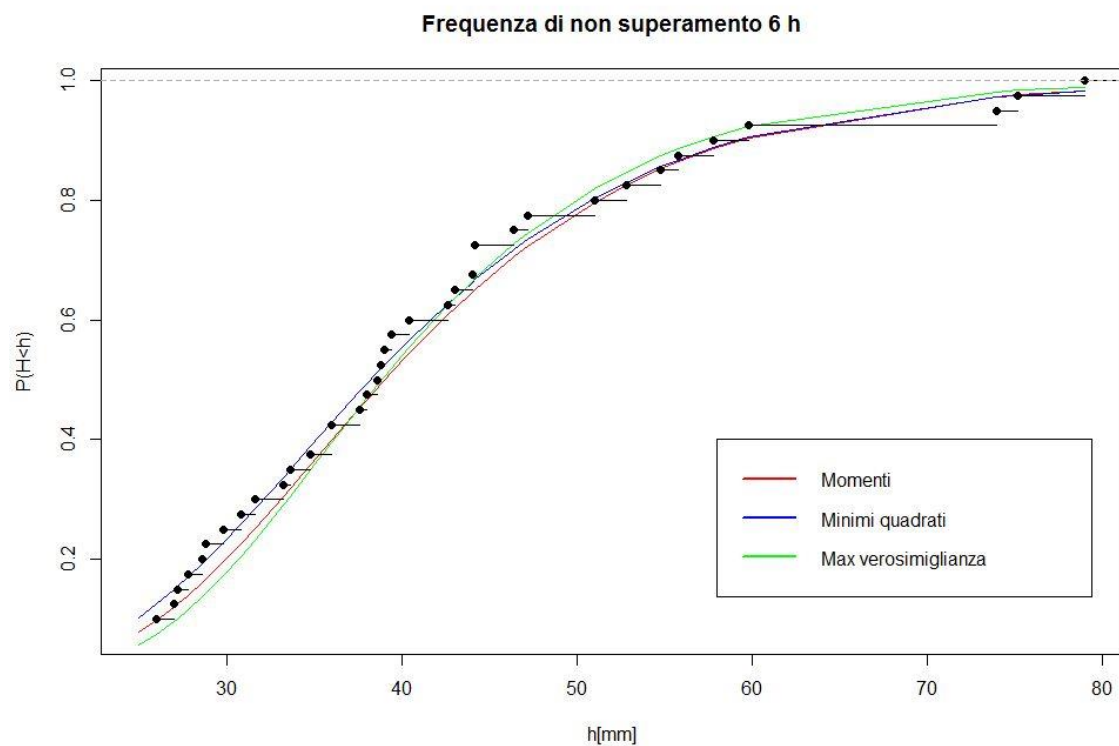
### 2.2.1 Curve di Gumbel per la durata di 1 ora



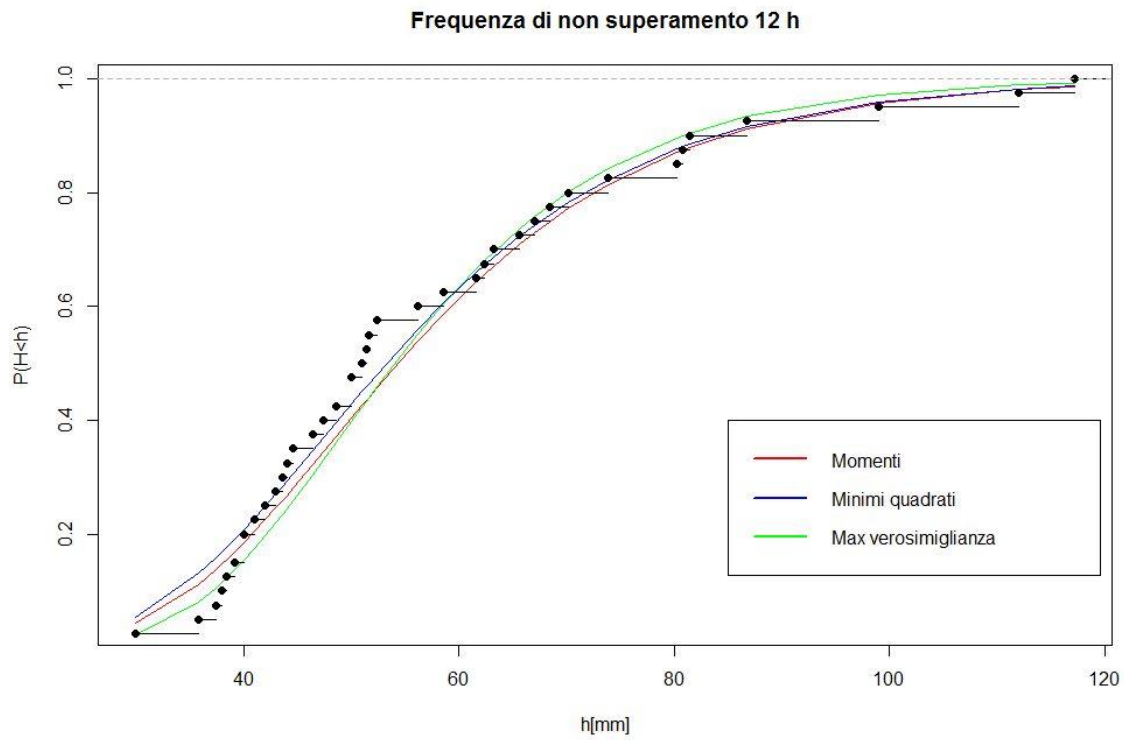
### 2.2.2 Curve di Gumbel per la durata di 3 ore



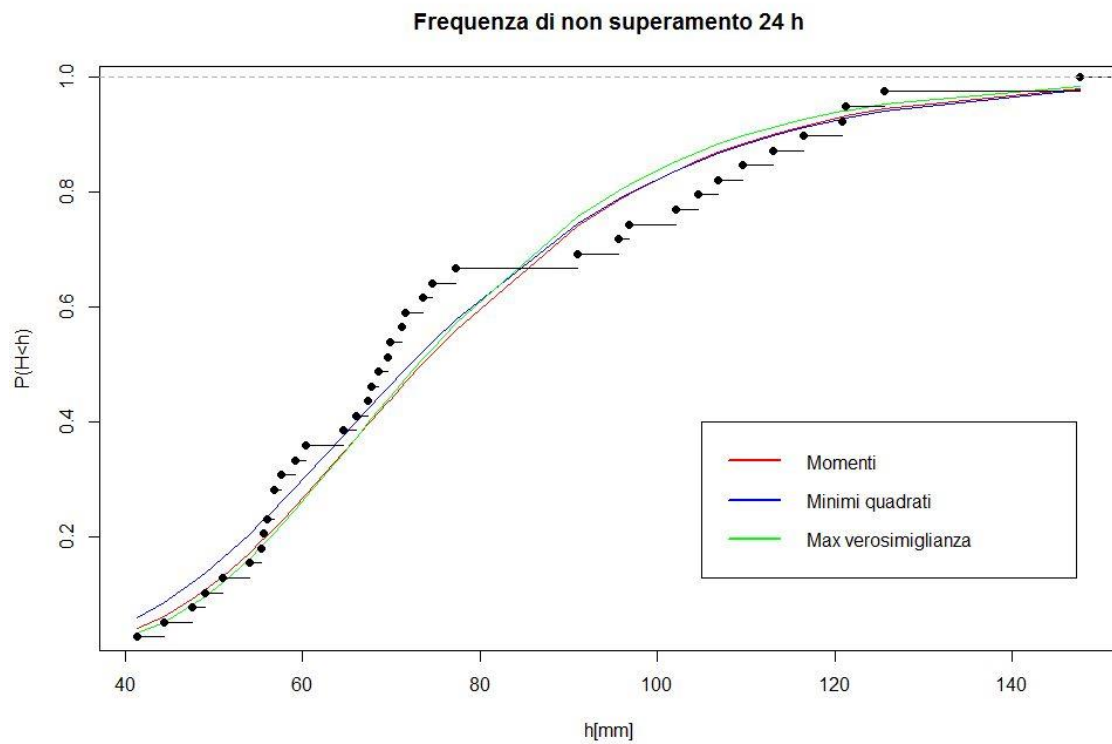
### 2.2.3 Curve di Gumbel per la durata di 6 ore



### 2.2.4 Curve di Gumbel per la durata di 12 ore

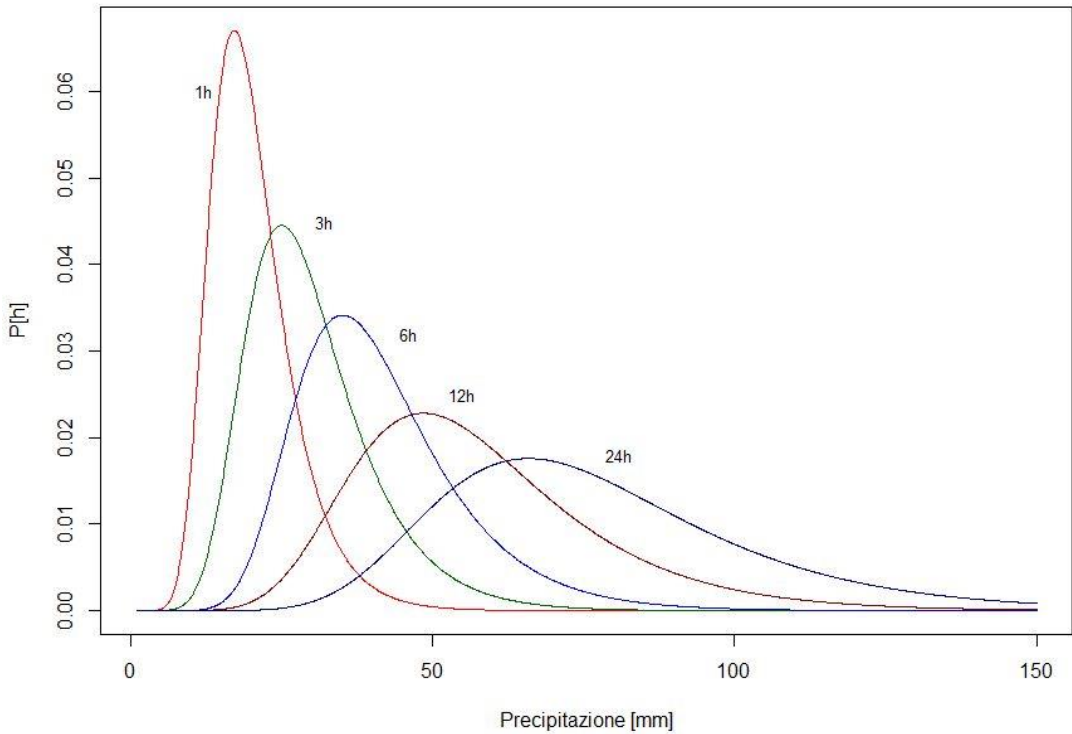


### 2.2.5 Curve di Gumbel per la durata di 24 ore

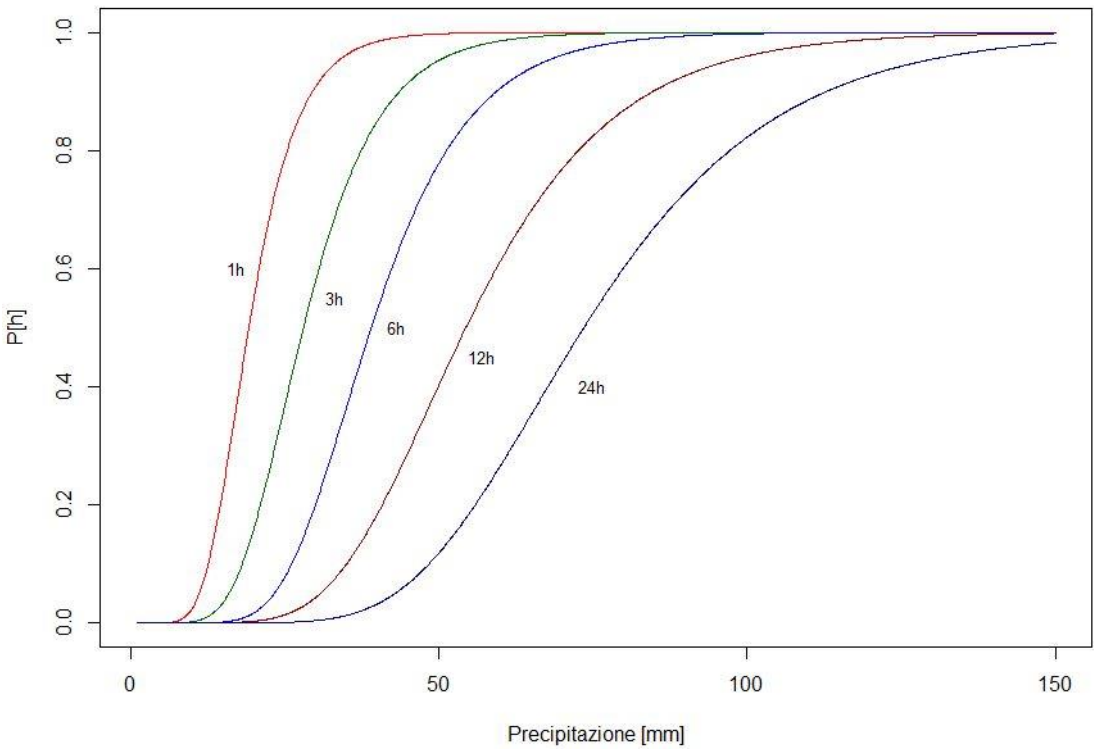


### 2.2.6 Curve di Gumbel ottimali

Distribuzione di probabilità di Gumbel

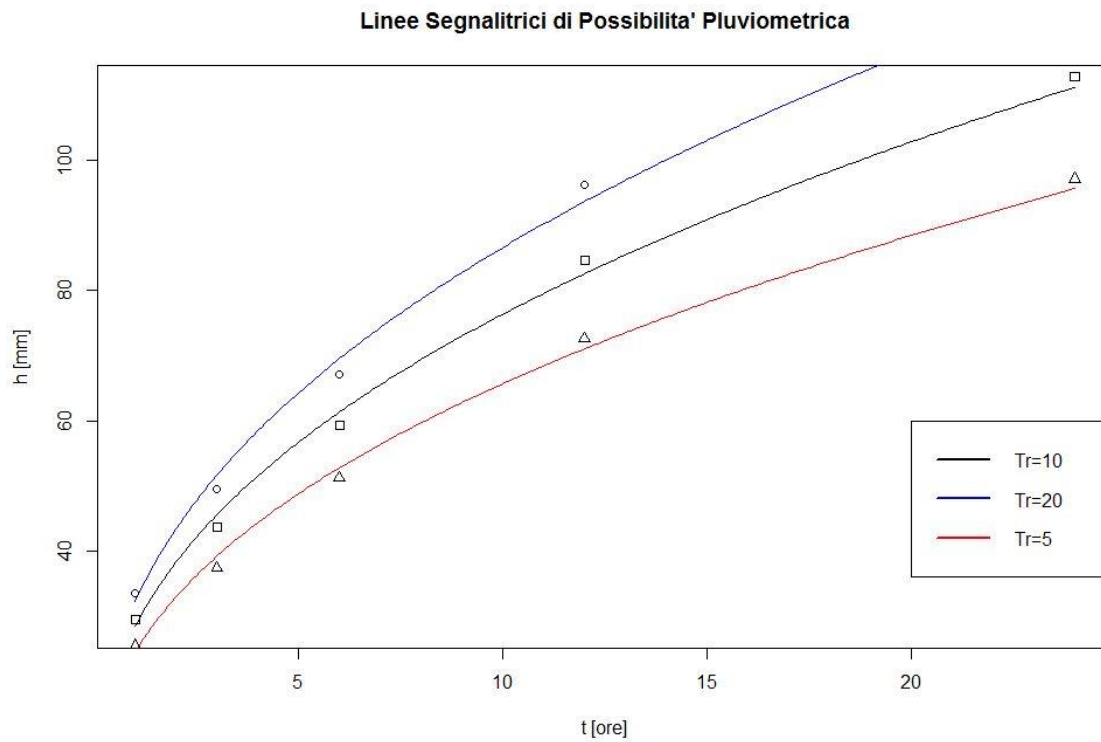


Curve di probabilità di Gumbel

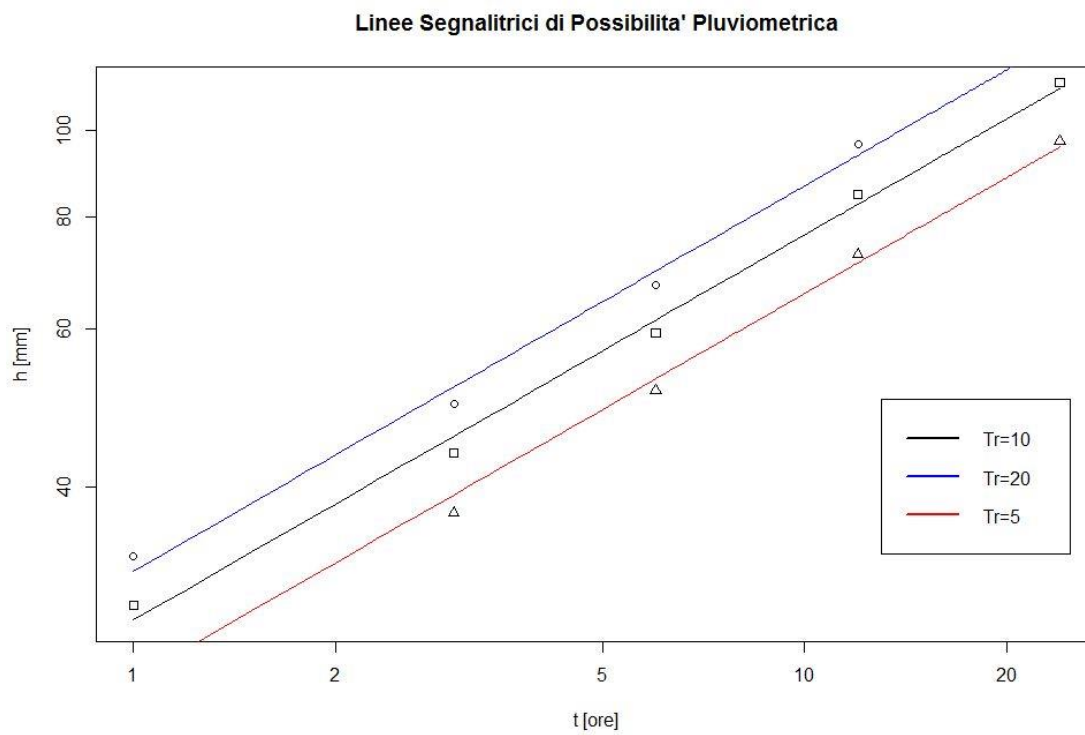




### 2.2.7 LSPP lineari



### 2.2.8 LSPP logaritmiche



### 3 Scrosci

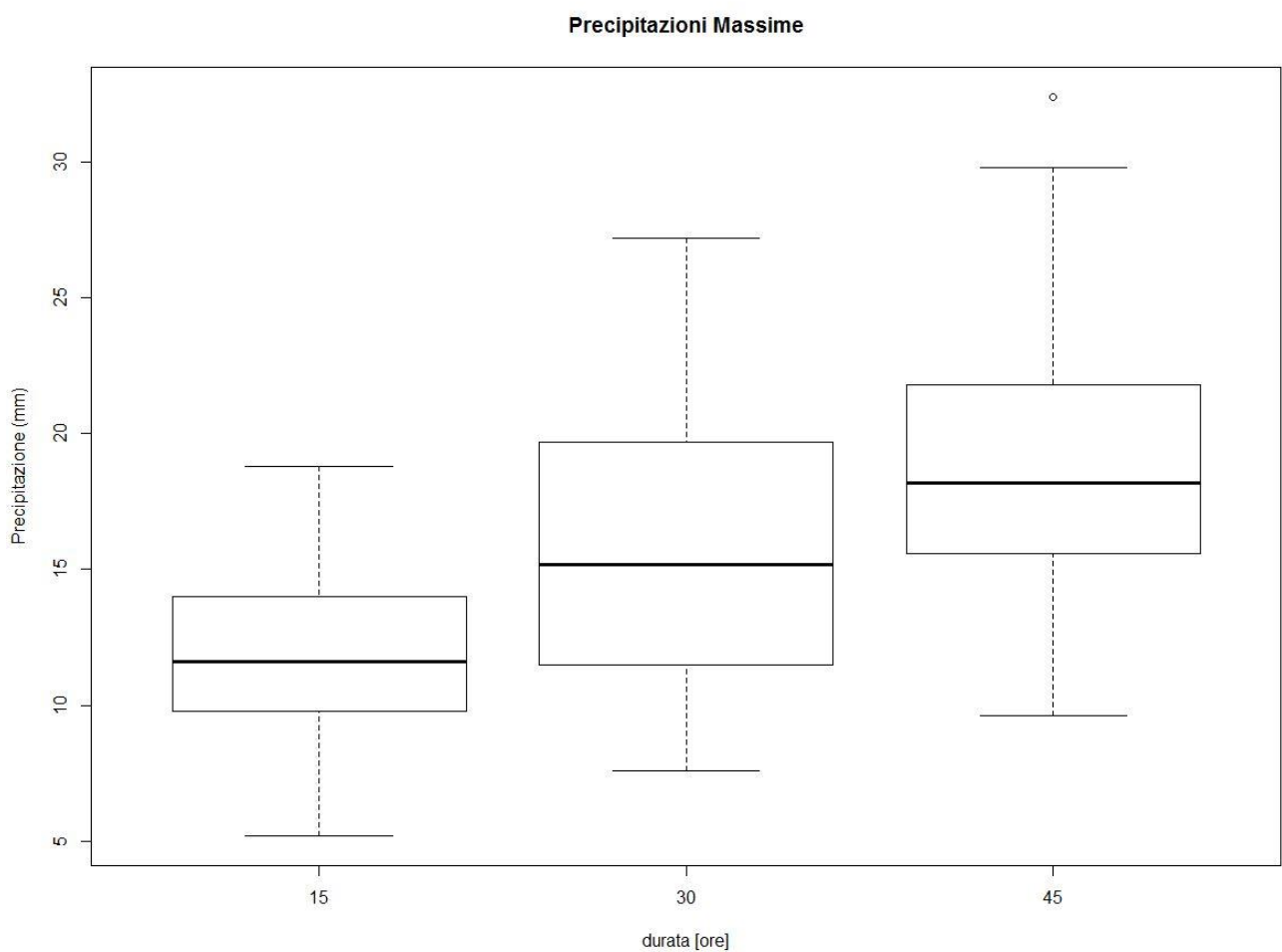
Per quanto riguarda gli scrosci si è proceduto esattamente nella stessa modalità appena descritta per le precipitazioni orarie. Pertanto in questa relazione verrà omessa tutta la parte teorica e ci si limiterà ad esporre i risultati ottenuti.

#### 3.1 Dati pluviometrici

Anno	15m	30m	45m
1951	NA	23	NA
1952	NA	20.6	NA
1953	NA	NA	NA
1954	NA	7.6	NA
1955	NA	NA	NA
1956	NA	NA	NA
1957	13.8	NA	NA
1958	NA	10	NA
1959	11.6	12.8	NA
1960	NA	15.2	NA
1961	NA	NA	NA
1962	NA	19.6	26
1963	NA	NA	NA
1964	NA	11	NA
1965	11.6	NA	NA
1966	NA	NA	NA
1967	NA	11.4	NA
1968	8.4	13.2	18.8
1969	9.8	15.2	18.4
1970	14	20.6	21.8
1971	14	15.6	16.6
1972	8.8	14.6	16
1973	18	27.2	32.4
1974	12.8	13	16
1975	10	NA	NA
1976	NA	16	NA
1977	10.8	12.8	13.6
1978	18.8	19.8	21.4
1979	7.2	10.6	16.6
1980	16.4	19	20.8
1981	10.2	11.6	12.8
1982	13.6	20.4	24.8
1983	12.6	17	19.4
1984	5.2	9.8	11.2

<b>1985</b>	13.8	20.6	29.8
<b>1986</b>	7	9	9.6
<b>1987</b>	15.6	17.6	18
<b>1988</b>	7	9.6	12.6
<b>1989</b>	16.4	26.6	29.8
<b>1990</b>	11.6	13	15.6

### 3.1.1 Verifica della coerenza delle misure



**Figura 8: Boxplot**

Si noti che, al crescere della durata, la mediana cresce, come ci si aspettava. La verifica risulta quindi soddisfatta. L'aumento della dimensione dei baffi definisce un aumento della varianza, probabilmente dovuta alla presenza di errori nelle misure. Inoltre, nelle serie relative ai 45 minuti è presente un valore esterno ai baffi, contrassegnato da un simbolo circolare bianco. Tale risultato probabilmente è riferito ad un errore grossolano.

### 3.1.2 Distribuzioni

Sono dunque rappresentati tre istogrammi, uno per ogni durata di evento, che riportano in ascissa le altezze di precipitazione ed in ordinata le rispettive frequenze.

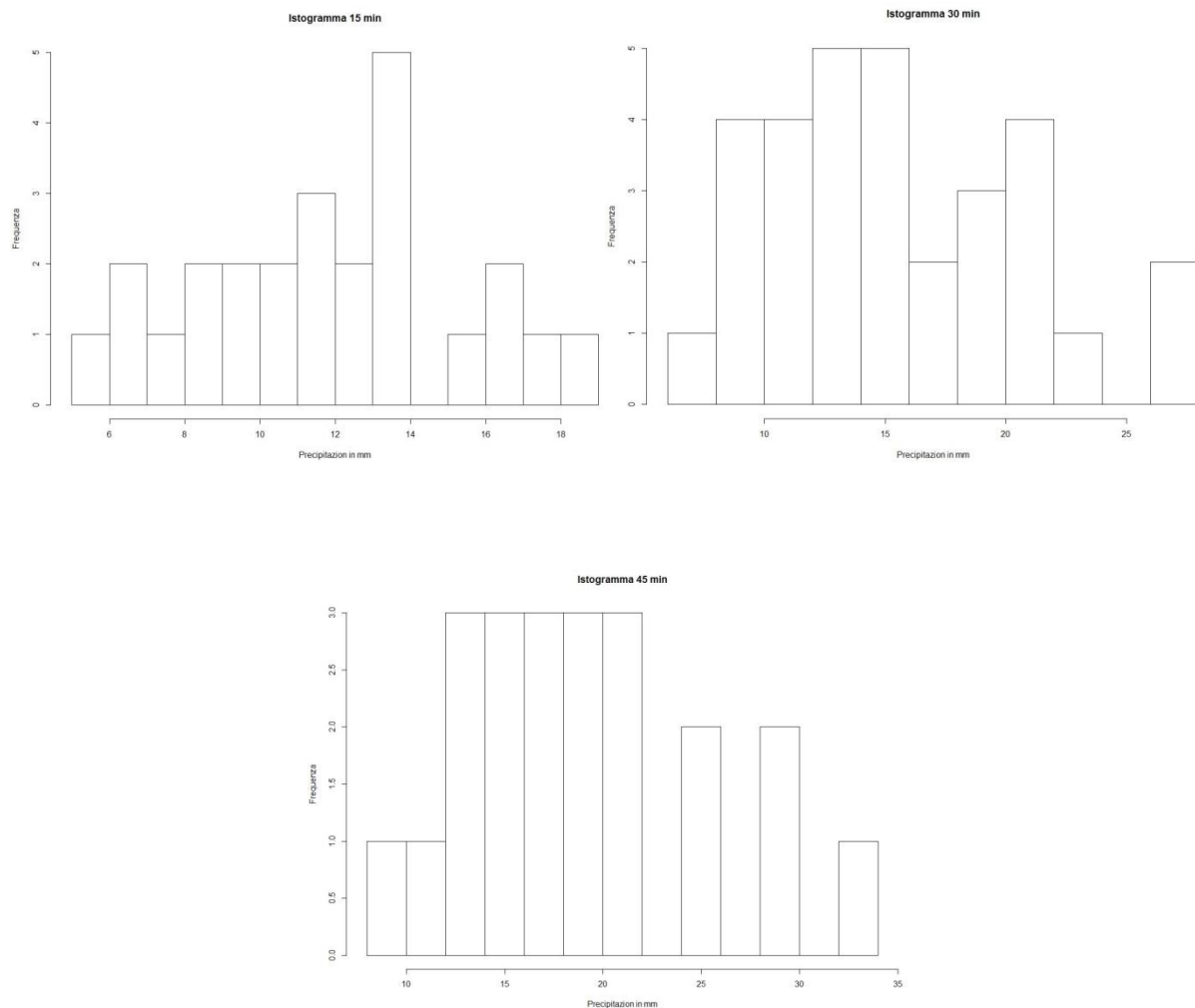


Figura 9: Istogrammi

### 3.1.3 Stima dei parametri – Test di Pearson

Al fine di ottenere le LSPP, si procede utilizzando tre metodi di adattamento dei parametri allo scopo di calcolare i parametri di forma e di scala:

- Metodo dei momenti
- Metodo dei minimi quadrati
- Metodo della massima verosimiglianza (maximum likelihood)

Successivamente bisognerà individuare la coppia di parametri più adatta facendo ricorso al test di Pearson al fine di ottenere la miglior curva di Gumbel.

Per effettuare tali operazioni si utilizza il software open source *R*. Si veda lo script allegato.

Di seguito si riportano i risultati ottenuti:

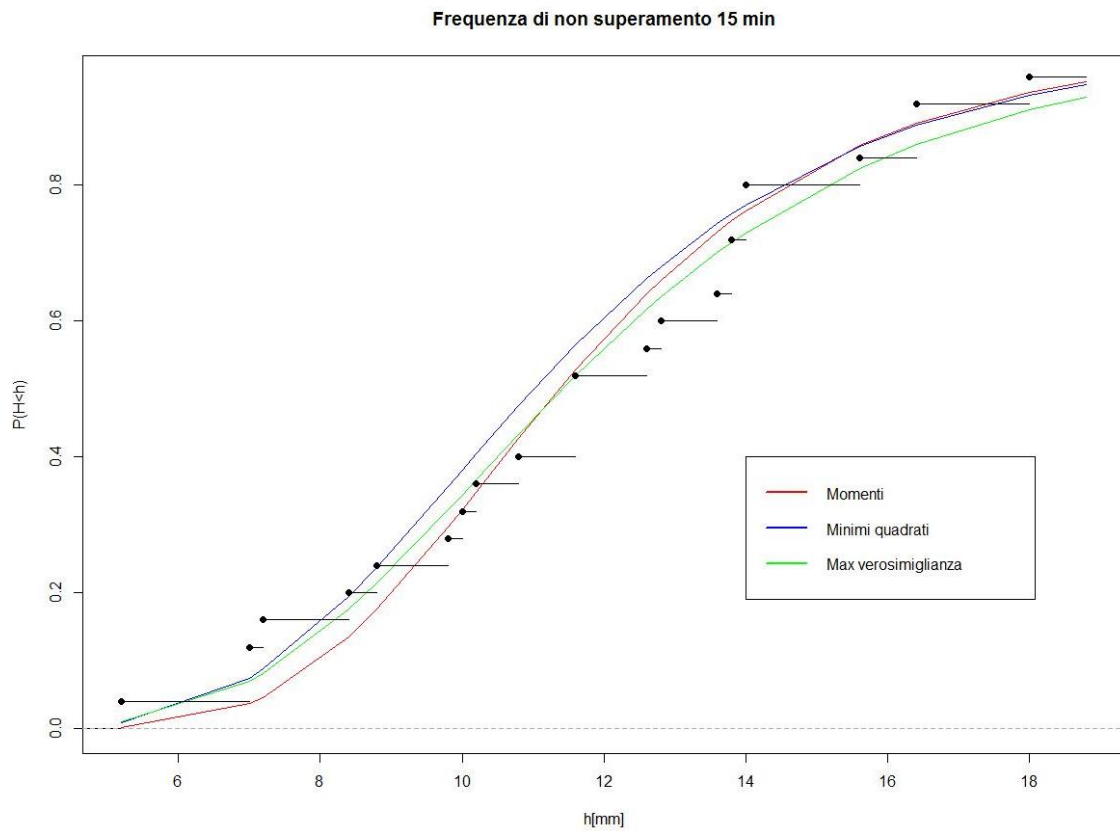
	$\chi^2_{Momenti}$	$\chi^2_{Minimi\ quadrati}$	$\chi^2_{Max\ ver.}$	a [LOC]	b [SCALA]
15 min	2.0	1.6	<b>1.2</b>	10.21204	3.273175
30 min	3.354839	3.354839	<b>3.032258</b>	13.238	4.106315
45 min	0.7272727	<b>0.2727273</b>	0.7272727	15.77305	4.865305

### 3.1.4 LSPP

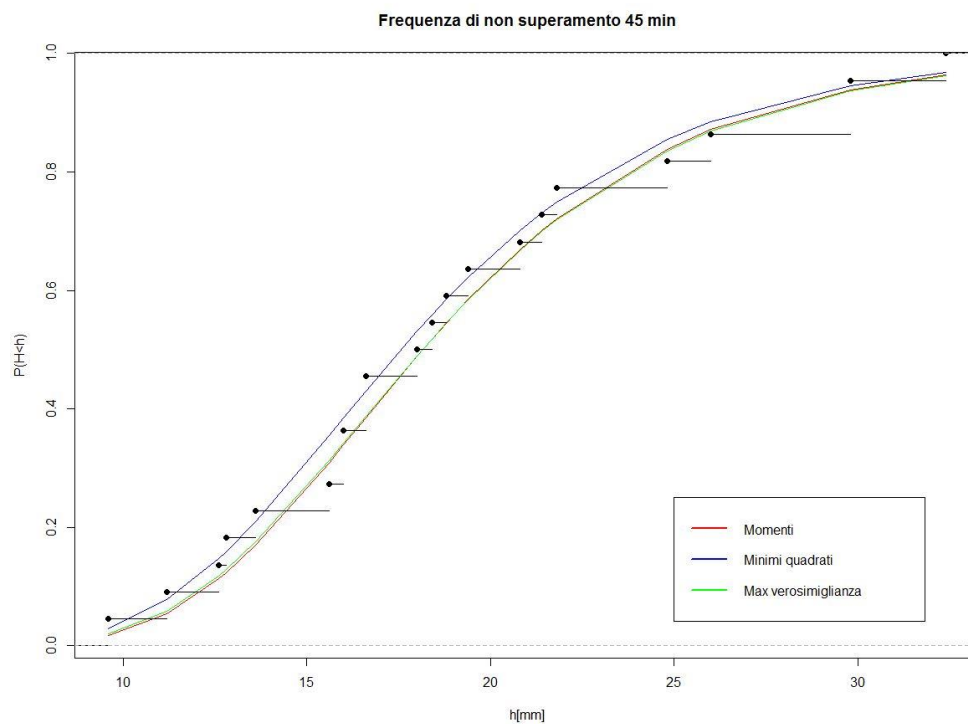
Tr	$a$	$n$
10	4.93	0.45
20	5.44	0.45
5	4.40	0.44

## 3.2 Risultati

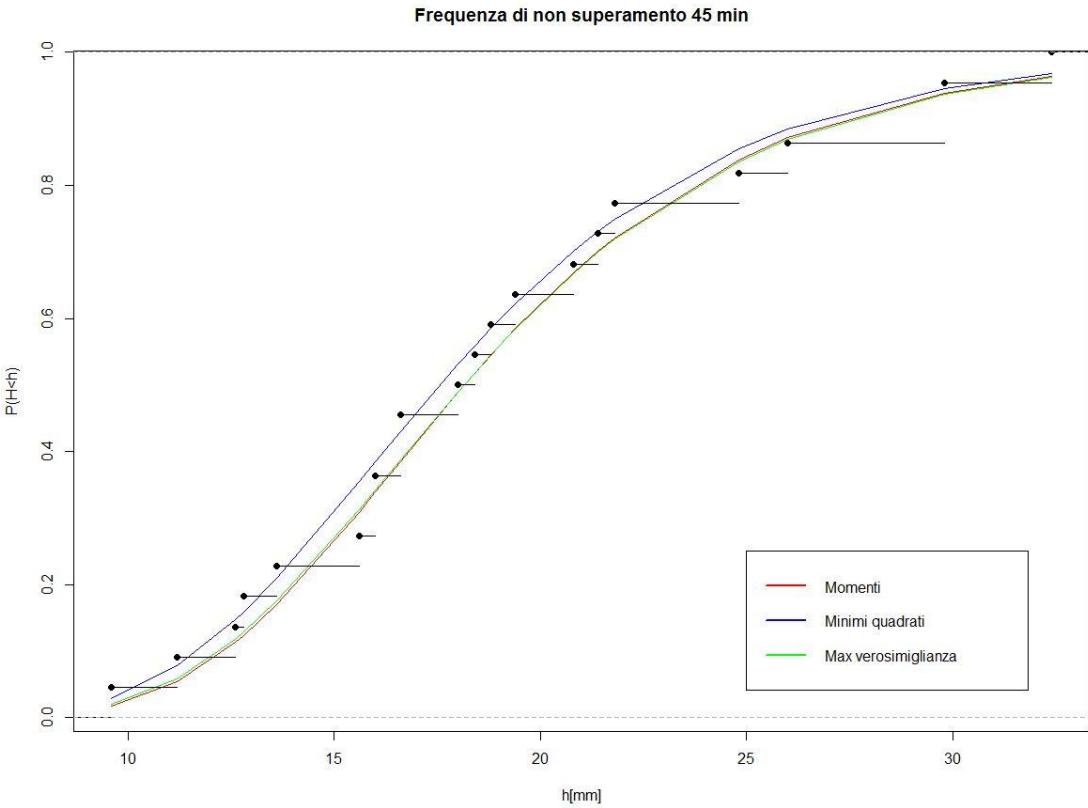
### 3.2.1 Curve di Gumbel per la durata di 15 min



### 3.2.2 Curve di Gumbel per la durata di 30 min

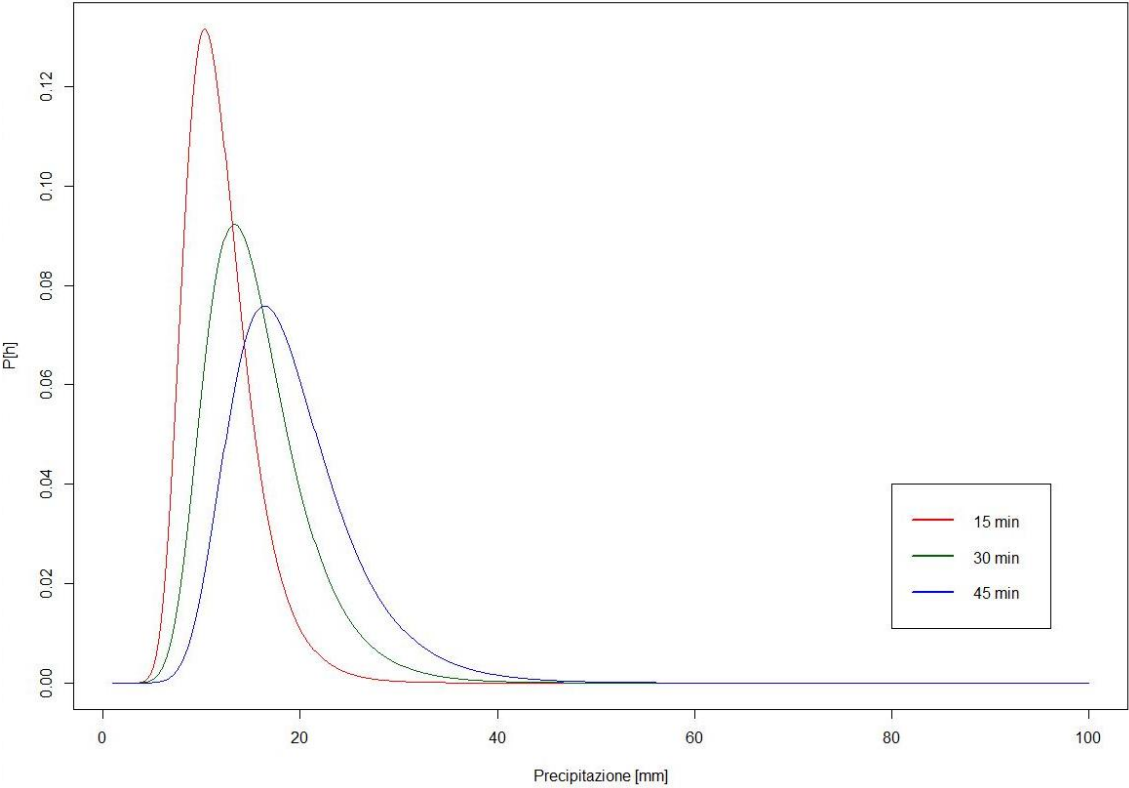


### 3.2.3 Curve di Gumbel per la durata di 45 min

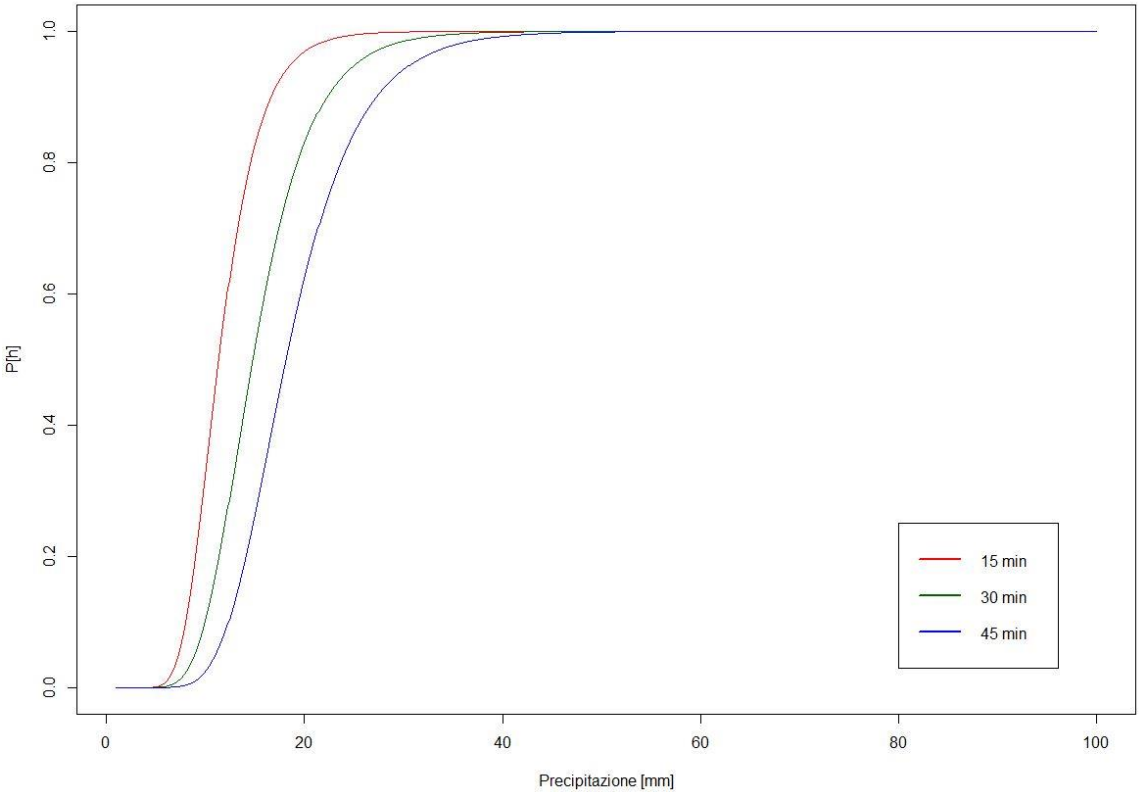


### 3.2.4 Curve di Gumbel ottimali

Distribuzione di probabilità di Gumbel

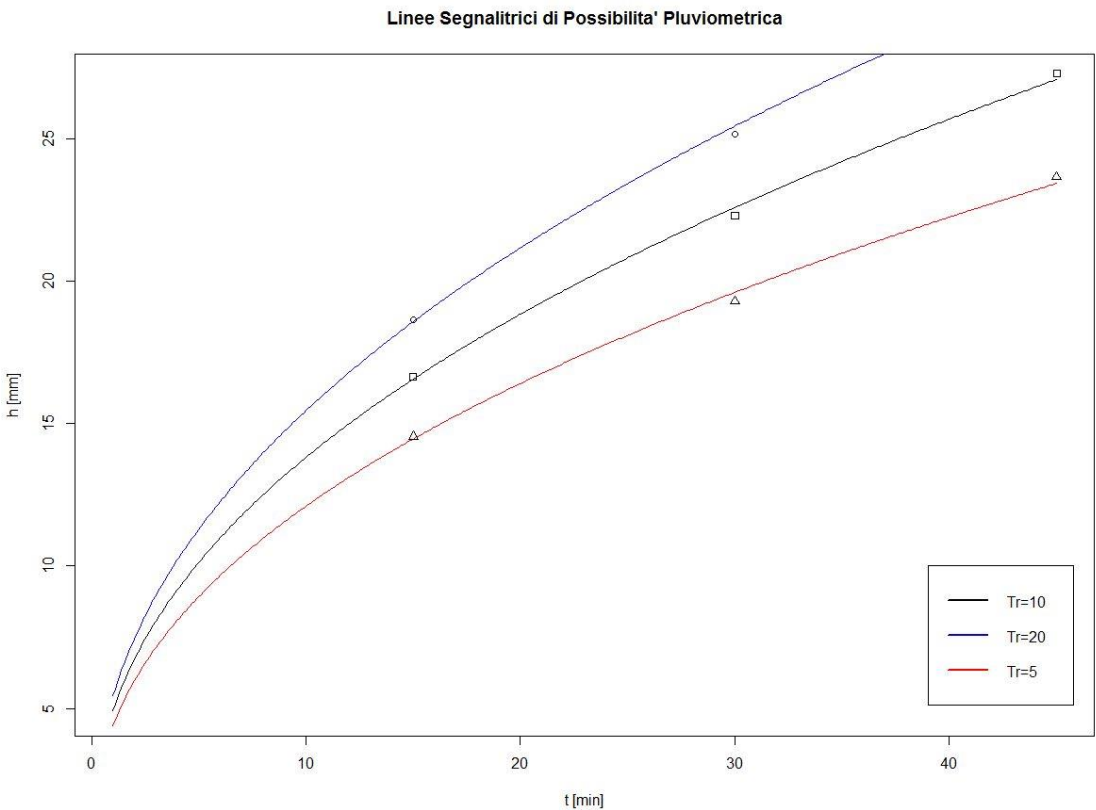


Curve di probabilità di Gumbel





### 3.2.5 LSPP lineari



### 3.2.6 LSPP logaritmiche

