

# Capítulo 1

## Fundamentos

### 1.1 O pano de fundo euclidiano

#### O espaço cartesiano

Na **mecânica clássica**, a descrição de sistemas físicos é baseada nos conceitos fundamentais de espaço e tempo que tomaram forma ao longo da história, desde a Grécia antiga até os dias atuais. As evidências filosóficas, observacionais e experimentais que foram coletadas durante todo este tempo indicam que vivemos em um mundo cujos eventos ocorrem em posições definidas em um espaço retangular com três **dimensões** (altura, largura e profundidade, por exemplo), e que mudam (ou evoluem), com o correr de um conceito que nos é bastante intuitivo: o tempo.

De fato, esses conceitos fazem parte de nossa vida ordinária de forma muito profunda, tanto que nossas noções intuitivas sobre o movimento dos corpos são impressionantemente precisas. Sem essas noções, nunca seríamos capazes de realizar proezas esportivas, como cabecear uma bola após um cruzamento, ou atacar uma bola de vôlei após um levantamento. Os seres humanos não são os únicos seres vivos a compreender os fenômenos mecânicos de forma tão complexa, nem os melhores nessa tarefa, do ponto de vista instintivo. Os seres vivos que habitam ambientes como o nosso necessariamente evoluíram, no sentido darwiniano, para lidar com o movimento dos corpos. Nestes ambientes existe o conceito de espaço, onde os corpos se movimentam de forma previsível, e o conceito de tempo, que nos diz a que taxa o movimento desses corpos evolui.

Do ponto de vista matemático, o palco de fundo da mecânica clássica é um espaço cartesiano, que pode ser formado pelo produto cartesiano de retas reais. A **reta real**  $\mathbb{R}$  é um espaço topológico, cujos elementos são números reais e a estrutura adjacente é a da topologia de intervalos abertos. Podemos construir um plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  com o produto cartesiano  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ , de modo que se  $x \in \mathbb{R}$  é um ponto da primeira entrada do produto e  $y \in \mathbb{R}$  é um ponto da segunda entrada, o par ordenado  $(x, y)$  será um ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Dessa forma, o plano cartesiano é formado por pontos que são pares ordenados de números reais. Cada número real é chamado de coordenada e, de modo não muito rigoroso, os físicos se referem ao par  $(x, y)$  como as coordenadas de um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$ .

O espaço que nos interessa, contudo, é o espaço cartesiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Este espaço é formado pelo produto cartesiano de três retas reais, de modo que

cada ponto necessita de três números reais para ser identificado. Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  as coordenadas de respectivos pontos das três retas reais. O produto cartesiano  $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$  é tomado de modo que  $(x, y, z)$  sejam as coordenadas de um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$ . Da mesma maneira, podemos construir espaços cartesianos com qualquer número de retas reais. Geralmente, estes espaços são denominados  $\mathbb{R}^n$ , em que  $n$  denomina a dimensão do espaço cartesiano e coincide com o número de retas reais que compõem o produto.

## A estrutura geométrica e sistemas de coordenadas

Mais estrutura é necessária para que os espaços cartesianos sejam úteis ao descrever fenômenos físicos. De certa forma, essas estruturas já estão presentes na reta real, já que os próprios axiomas que definem o corpo dos números reais definem também propriedades de ordenamento e completude. No espaço cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , o que precisamos definir é uma geometria.

Uma geometria é definida através de uma métrica, que é um objeto geométrico cuja função é tomar dois pontos do espaço cartesiano e atribuir a este par um único número real positivo. Ocorre que não há uma única forma de cumprir esta tarefa em um espaço cartesiano, mas parece que a natureza tem uma escolha preferencial. Em particular, o método utilizado para medir a distância entre dois pontos a partir de suas coordenadas é conhecido desde a Grécia antiga, conhecido pelo **teorema de Pitágoras**: *O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos*. Todo espaço no qual um triângulo retângulo obedeça ao teorema de Pitágoras é chamado **espaço euclidiano**. Usamos o símbolo  $\mathbb{E}^3$  para identificar o espaço euclidiano tridimensional. Mais adiante daremos detalhes sobre como o teorema de Pitágoras dá origem a uma estrutura geométrica euclidiana de maneira natural.

Embora nem sempre necessário, vamos tornar clara, sempre que possível, a diferença entre os espaços  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{E}^3$ . O primeiro é simplesmente um **produto cartesiano** de três retas reais. Já o espaço  $\mathbb{E}^3$  é o espaço  $\mathbb{R}^3$  munido de uma **métrica euclidiana**. Características bastante conhecidas de espaços euclidianos são, por exemplo, a existência de retas paralelas, bem como o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180 graus.

Em espaços métricos, como no caso do espaço euclidiano, podemos definir sistemas de coordenadas. O exemplo mais simples no caso de  $\mathbb{E}^3$  é o **sistema de coordenadas cartesiano**, figura 1.1, que consiste em uma origem e três eixos cartesianos reais. Cada eixo cartesiano representa uma reta real e cada ponto de  $\mathbb{E}^3$  é representado por uma trinca ordenada de números reais  $(x, y, z)$ . Por vezes também utilizaremos a notação  $(x^1, x^2, x^3)$ . As coordenadas da origem são, naturalmente,  $(0, 0, 0)$ .

Outros dois sistemas de coordenadas bastante comuns são as **coordenadas esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$ , e as **coordenadas cilíndricas**  $(\rho, \theta, z)$ , cujos eixos dependem do ponto do espaço.

Sistemas de coordenadas distintos podem ser relacionados através de transformações de coordenadas. Por exemplo, as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  são definidas, observando-se a fig. 1.1, pelo sistema de equações

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi. \quad (1.1)$$

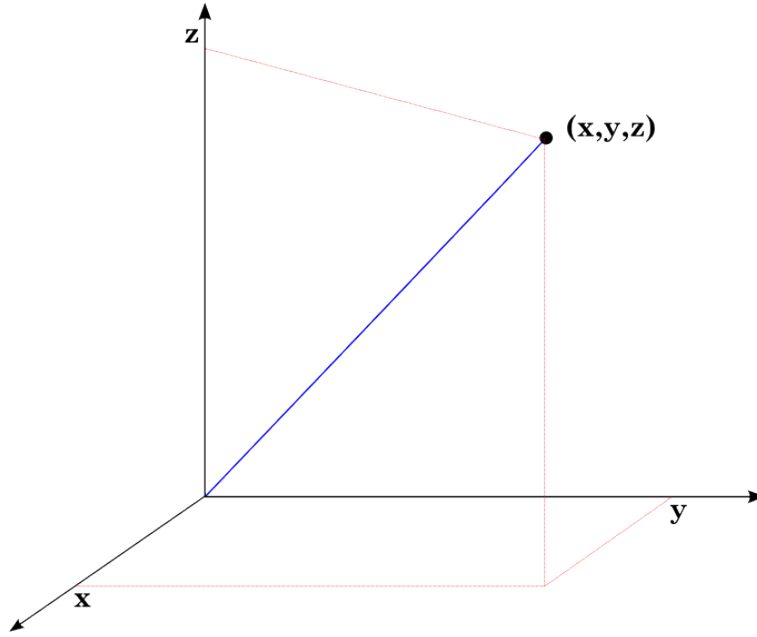


Figura 1.1: Sistema de coordenadas cartesiano.

Por outro lado, temos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{r}. \quad (1.2)$$

O sistema (1.2) contém as equações que definem a transformação do sistema de coordenadas cartesiano para o esférico, enquanto (1.1) é sua transformação inversa.

Espaços euclidianos possuem uma propriedade muito particular. Embora ele seja infinito em extensão, é possível definir um único sistema de coordenadas cartesiano em todo o espaço, de modo que todo ponto  $x \in \mathbb{E}^3$  tem uma única denominação em coordenadas cartesianas.

## 1.2 O tempo e trajetórias de partículas pontuais

Existem duas formas de se representar a dinâmica em espaços euclidianos. A primeira é a construção do espaço-tempo quadridimensional cartesiano. Podemos montar sucessivas cópias do espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$ , cada cópia nominada por um parâmetro real monotonicamente crescente. Este parâmetro é relacionado ao **tempo**  $t$ , que é representado pela reta real  $\mathbb{R}$ . Um sistema físico qualquer descreve uma configuração geométrica em  $\mathbb{E}^3$  para um determinado instante de tempo, e esta configuração geralmente muda de um espaço euclidiano a outro, para diferentes valores de  $t$ . Esta dinâmica pode ser representada por um espaço quadridimensional  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{E}^3 \otimes \mathbb{R}$ , denominado espaço-tempo newtoniano. É importante notar que  $\mathbb{R}^4$  não é um espaço euclidiano segundo a nossa definição. Ele simplesmente representa sucessivas cópias de  $\mathbb{E}^3$  relacionados a cada valor de  $t \in \mathbb{R}$ .

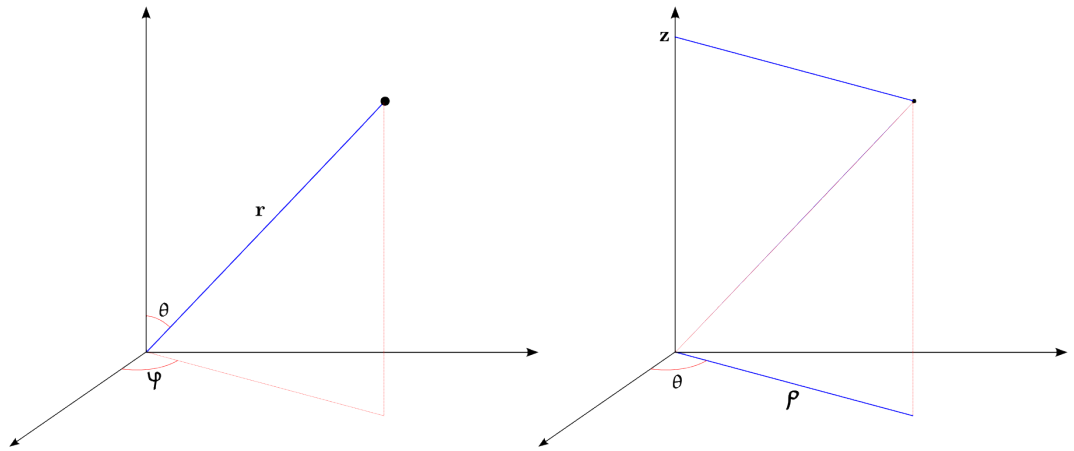


Figura 1.2: Sistemas de coordenadas esférico e cilíndrico.

A segunda forma, muito mais utilizada, é notar que a trajetória de sistemas físicos pode ser parametrizada pelo tempo  $t$  em um mesmo espaço euclidiano.

Vamos supor uma partícula pontual restrita a um plano  $\mathbb{E}^2$ , que se localiza na origem do sistema de coordenadas no tempo  $t = 0$ . À medida que passa o tempo, a partícula pode mudar sua posição. Ela deve fazê-lo continuamente: se a partícula se desloca de um ponto  $A$  a um ponto  $B$ , deve percorrer uma curva contínua entre  $A$  e  $B$ .

Esta curva é representada por um conjunto de equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ , parametrizadas pelo tempo  $t$ . Do ponto de vista do espaço-tempo newtoniano tridimensional, a partícula descreve uma trajetória em  $\mathbb{R}^3$  como mostra a figura (1.3).

Voltando ao caso tridimensional, as equações paramétricas são dadas por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1.3)$$

ou em notação mais compacta,

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

A forma compacta (1.4) de se escrever as equações paramétricas (1.3) é denominada notação em componentes, ou tensorial. Nesta notação, um conjunto de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ , ou  $(x^1, x^2, x^3)$ , é representado por um conjunto  $\{x^i\}$ , em que  $i$  é um índice que carrega valores naturais. Dizemos que  $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ , ou seja,  $i$  toma valores de 1 a 3 neste caso. Veremos que esta notação tem grandes vantagens. Uma delas é o fato de que a generalização de sistemas com dimensões arbitrárias torna-se imediata. Por exemplo, as equações paramétricas para uma curva em um espaço de  $n$  dimensões são dadas simplesmente por (1.4), agora com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Regras para a utilização desta notação serão introduzidas ao longo do texto, quando necessárias.

### 1.3 A geometria do espaço euclidiano: Rotações

Além de transformações de coordenadas, existem outros tipos de transformações matemáticas que podemos executar sobre  $\mathbb{E}^3$ . Sempre que uma transformação

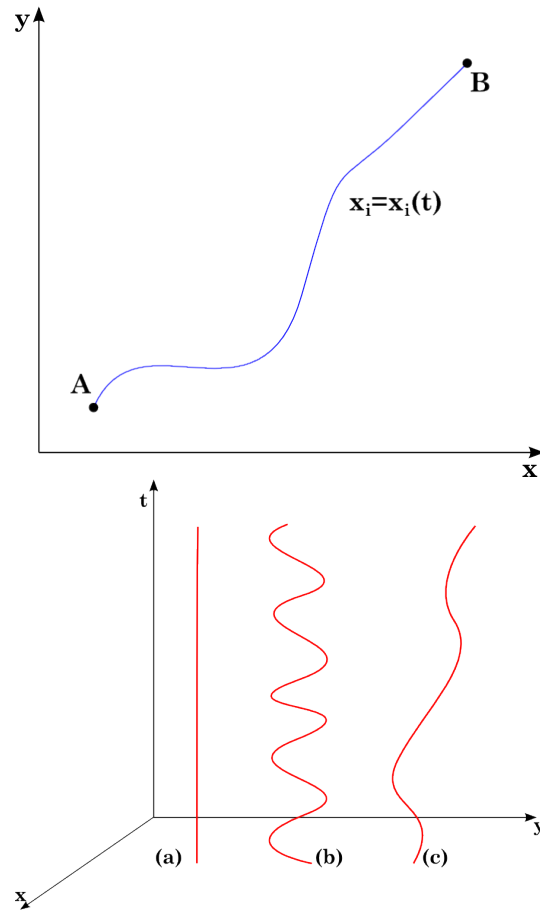


Figura 1.3: À esquerda, trajetória de uma partícula no plano  $\mathbb{E}^2$ . À direita, trajetórias no espaço-tempo  $\mathbb{R}^3$ . Em (a), temos uma partícula estática. Em (b), um exemplo de movimento oscilatório. Em (c) uma dinâmica não específica.

aplicada a  $\mathbb{E}^3$  resulta em um outro espaço  $\mathbb{E}^3$ , dizemos que tal transformação preserva a geometria do espaço euclidiano, ou seja, preserva não apenas sua **topologia** ( $\mathbb{R}^3$ ), como também preserva a distância entre dois pontos. Dizemos que essas transformações são simetrias, ou **isometrias** da geometria euclidiana. Além de transformações de coordenadas, são exemplos de simetrias euclidianas as **rotações**.

A simetria de  $\mathbb{E}^3$  por rotações é a simetria que define a natureza matemática das variáveis cinemáticas e dinâmicas da mecânica newtoniana. Vamos supor, por simplicidade, um espaço  $\mathbb{E}^2$ , que é o espaço euclidiano bidimensional, com um sistema de coordenadas cartesiano  $x^i = (x^1, x^2)$ , como na figura 1.4.

Na figura é também representado um segundo sistema de coordenadas  $y^i = (y^1, y^2)$ , rodado com relação ao primeiro sistema por um ângulo  $\theta$  no sentido

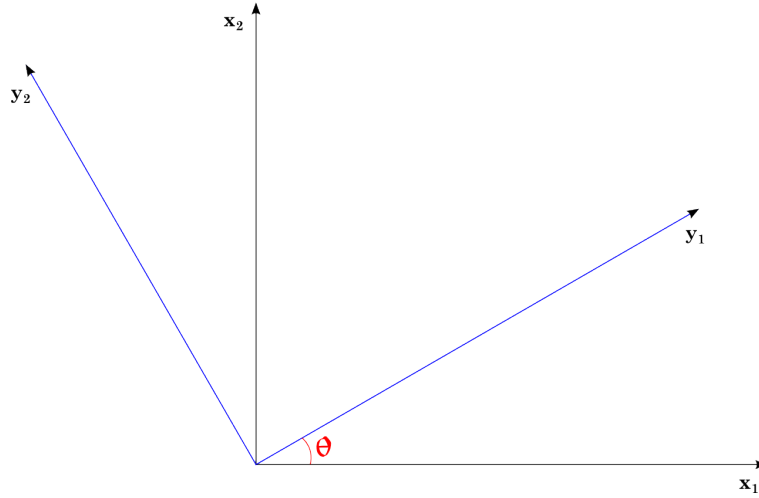


Figura 1.4: Espaço  $\mathbb{E}^2$  com dois sistemas de coordenadas cartesianos, rodados em um ângulo  $\theta$ .

anti-horário. Ambos os sistemas se relacionam pelas transformações

$$y^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta, \quad (1.5a)$$

$$y^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta. \quad (1.5b)$$

Usando uma notação matricial, essas equações podem ser escritas por

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Em componentes, as variáveis  $(x^1, x^2)$  são representadas por  $x^i$ , em que  $i$  é um índice que assume os valores de 1 e 2. Da mesma forma,  $y^i = (y^1, y^2)$ . A relação entre a notação em componentes e a matricial é a seguinte:  $x^i$  e  $y^i$  estão relacionadas às matrizes coluna:

$$x^i \implies x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y^i \implies y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Assim, a notação em componentes é, também, uma forma de se representar componentes de matrizes.

As componentes da matriz que aparece em 1.6, são representadas pelo objeto  $R^i_j$ , com dois índices, tal que

$$R^i_j \implies R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

A matriz  $R$  é denominada **matriz de rotação** em duas dimensões, enquanto  $R^i_j$  são suas componentes. As regras de álgebra matricial continuam válidas neste caso: em  $R^i_j$ , o primeiro índice representa uma linha da matriz, enquanto o segundo índice representa uma coluna. Por exemplo,  $R^1_1 = \cos \theta$ , enquanto  $R^1_2 = \sin \theta$ .

Neste caso, a equação (1.6) pode ser escrita na forma mais compacta

$$y^i = \sum_{j=1}^2 R^i_j x^j. \quad (1.9)$$

Podemos fazer um esforço para simplificar ainda mais esta expressão, usando uma outra convenção:

**Proposição 1.** (*Convenção de soma de Einstein*)

A expressão (1.9) pode ser substituída pela equivalente

$$y^i = R^i_j x^j, \quad (1.10)$$

com as seguintes regras:

1. Índices sobrescritos, como  $i$  em  $A^i$ , são denominados índices contravariantes.
2. Índices subscritos, como  $i$  em  $A_i$ , são denominados índices covariantes.
3. Em um produto de dois objetos, dois índices de mesmo nome, um covariante e outro contravariante, implicam em uma soma em todos os valores do índice. Assim, a expressão  $A^i B_i = B_i A^i$  representa a soma  $\sum_{i=1}^n A^i B_i$ , se  $i$  é um índice com valores de 1 a  $n$ . Dois índices somados são denominados **índices contraídos**, ou **índices mudos**.
4. Índices mudos podem ter seus nomes trocado em uma mesma expressão. Por exemplo,  $A^i B_i = A^j B_j = A^k B_k$ , em que  $i$ ,  $j$  e  $k$  são nomes diferentes para o mesmo índice: todos correm sobre o mesmo conjunto de números, por exemplo, de 1 a  $n$ .
5. Índices solitários podem ser trocados, desde que seja em toda uma equação. Exemplo:  $A^i = M^i_j B^j$  pode ser também escrito por  $A^k = M^k_j B^j$ .
6. Índices solitários em um lado de uma equação devem aparecer em igual quantidade e com mesmo nome no outro lado da mesma equação. Note que a expressão  $A^i = M^k_j B^j$  não faz sentido, visto que o índice  $i$  deveria estar também no lado direito.
7. Toda transformação linear pode ser escrita na forma  $y^i = M^i_j x^j$ , em que  $M^i_j$  são as componentes de uma matriz que não depende de  $x$  ou  $y$ .

A forma (1.10) é bastante útil por ser facilmente generalizada para qualquer dimensão. Neste caso, uma rotação em três dimensões também é representada pela transformação (1.10), com a diferença de que os índices assumem os valores (1, 2, 3). A matriz de rotação  $R$ , por outro lado, não é mais a matriz (1.8), mas uma matriz  $3 \times 3$  cuja forma depende da orientação dos eixos de ambos os sistemas de coordenadas. A mesma expressão

$$y^i = R^i_j x^j \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1.11)$$

pode representar uma rotação em  $n$  dimensões. Neste caso,  $R$  é uma matriz  $n \times n$ , distinta de (1.8)

Matrizes de rotação são matrizes com propriedades especiais. Vamos pontuar algumas características:

1.  $R$  é **ortogonal**, ou seja,  $R^T R = \mathbf{1}$ , em que  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade e  $R^T$  é a matriz transposta. Neste caso, temos que  $R^T = R^{-1}$ , ou seja, a inversa  $R^{-1}$  é igual à transposta. Em componentes, temos que  $R^T R$  é um produto de matrizes, ou seja, suas componentes são dadas por  $(R^T R)^i_j = (R^T)^i_k R^k_j$ .
2. Contudo matrizes transpostas são obtidas trocando-se linhas por colunas, ou seja,  $(R^T)^i_k = R^i_k$ . Assim,  $(R^T R)^i_j = (R^T)^i_k R^k_j = R^i_k R^k_j$ .
3. A inversa de uma matriz ortogonal é igual a sua transposta, portanto,  $(R^{-1})^i_k = (R^T)^i_k = R^i_k$ .
4. A relação de ortogonalidade em notação tensorial é dada por  $(R^T R)^i_j = (\mathbf{1})^i_j \equiv \delta^i_j$ , que é denominada **delta de Kronecker**. Uma delta de Kronecker representa as componentes de uma matriz identidade e é melhor definida por

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} . \quad (1.12)$$

5. A relação de ortogonalidade se escreve, portanto,  $R^i_k R^k_j = \delta^i_j$ .
6. Matrizes de rotação são também especiais, ou seja  $\det R = 1$ .

Agora, vamos definir um **campo escalar**, também denominado **função escalar por rotações**. Um campo escalar por rotações é definido como uma função da posição que não muda o seu valor em cada ponto quando uma transformação de rotação é efetuada sobre o espaço. Ou seja, é uma função  $\phi(x)$  tal que

$$y^i = R^i_j x^j \implies \varphi(y) = \phi(x), \quad (1.13)$$

em que  $\varphi(y)$  é a função  $\phi(x)$  rotacionada. Exemplos de funções escalares por rotações são energia e trabalho, que definiremos adiante.

## 1.4 Vetores e campos vetoriais

A definição matemática de vetores segue as definições da álgebra linear, que consiste nas operações envolvendo **Espaços vetoriais**. Seja  $E$  um conjunto cujos elementos  $v \in E$  podem ser somados entre si e multiplicados por números reais.  $E$  é denominado espaço vetorial real, e  $v \in E$  um vetor real, se para todo  $u, v, w \in E$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades são obedecidas:

1.  $u + v = v + u$ ;
2.  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ;
3.  $\exists 0 \in \Phi : u + 0 = u$  - existência do elemento neutro da adição;



4.  $\exists -u \in \Phi : u + (-u) = 0$ ; - existência do elemento oposto da adição;
5.  $1u = u$ ;
6.  $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$ ;
7.  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ;
8.  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ .

Uma grande variedade de conjuntos matemáticos são espaços vetoriais, por exemplo os espaços  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n$ , incluindo-se a reta real  $\mathbb{R}$ . Contudo, estamos interessados em um tipo particular de vetor. São vetores definidos em cada ponto do espaço  $\mathbb{E}^3$  (**denominado espaço base**) e que preservam sua **norma** sob rotações. A norma de um vetor é definida a partir do produto escalar que, por consequência, define também uma métrica no espaço vetorial. Se a norma de um vetor é invariante por rotações, isto implica que o produto escalar e a métrica também o são. O caso euclidiano é especial, pois o espaço  $\mathbb{E}^3$  pode ser considerado seu próprio espaço vetorial e, portanto, a invariância da norma implica na invariância da distância entre dois pontos.

Neste caso, definimos um **campo vetorial euclidiano** da seguinte forma:

**Definição 1.** (Campo Vetorial Euclidiano)

Seja um espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$  munido de três **eixos ortonormais**  $\mathbf{e}_i \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Um objeto  $\mathbf{v}(x) \in \mathbb{E}^3$  é definido tal que possa ser decomposto em cada um dos eixos  $\mathbf{e}_i$ , ou seja,  $\mathbf{v}(x) = v^i(x) \mathbf{e}_i$ . As funções  $v^i(x)$  são denominadas componentes de  $\mathbf{v}(x)$  na base  $\mathbf{e}_i$ . Se, sob uma rotação  $y^i = R^i_j x^j$ , as componentes de  $\mathbf{v}(x)$  se transformam como

$$\bar{v}^i = R^i_j v^j, \quad (1.14)$$

então  $\mathbf{v}(x)$  é um **campo vetorial euclidiano**. Os eixos  $\mathbf{e}_i$  formam uma **base** ortonormal de  $\mathbb{E}^3$ .

Por ser um objeto geométrico, um campo vetorial em si não pode mudar por rotações, como deveríamos esperar. Contudo, suas componentes mudam. Neste caso, vetores em  $\mathbb{E}^3$  são definidos como aqueles cujas componentes se transformam da mesma forma que o sistema de coordenadas em si. Naturalmente, os eixos ortogonais também mudam:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = \bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i = R^i_j v^j \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i R^i_j v^j = \bar{\mathbf{e}}_j R^j_i v^i,$$

ou seja,  $\mathbf{e}_i = \bar{\mathbf{e}}_j R^j_i$ , ou

$$\bar{\mathbf{e}}_i R^i_j = \mathbf{e}_j \implies \bar{\mathbf{e}}_i R^i_j (R^{-1})^j_k = \mathbf{e}_j (R^{-1})^j_k \implies \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j (R^{-1})^j_k.$$

Contudo, matrizes de rotação são ortogonais, ou seja,

$$R^i_j (R^T)^j_k = \delta^i_k \implies (R^T)^i_j = (R^{-1})^i_j.$$

Assim,

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j (R^T)^j_i = R^j_i \mathbf{e}_j. \quad (1.15)$$

Portanto, os eixos ortogonais não se transformam como vetores em espaços euclidianos, mas se transformam com a transversa da matriz de rotação.

## 1.5 Produto interno e métrica

Estamos interessados em vetores que possuem norma, portanto, devemos incluir no espaço vetorial uma operação de **produto interno** entre dois vetores.

### Definição 2. (*Produto interno*)

Seja  $E$  um espaço vetorial. O produto interno é uma aplicação  $(\bullet, \bullet) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , que obedece as seguintes propriedades:

1. Simetria:  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$  para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ .
2. Bilinearidade:  $(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \beta (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ , para todo  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in E$  e  $\alpha, \beta$  escalares.
3. Positividade:  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{u} \in E$ .
4. Não degenerescência:  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$ .

### Definição 3. (Norma e ortogonalidade)

A norma de um vetor  $\mathbf{u}$  é definida como  $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ . Quando  $|\mathbf{u}| = 1$  dizemos que  $\mathbf{u}$  é unitário, e todo vetor  $\mathbf{u} \in E$  pode ser escrito na forma  $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \hat{\mathbf{u}}$ , em que  $\hat{\mathbf{u}}$  é um vetor unitário. De agora em diante, utilizaremos o símbolo  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{v})$  para representar o produto interno de dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  diferentes do vetor nulo são ortogonais se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ .

A partir do produto interno, definimos um objeto geométrico fundamental, denominado **métrica**. Vamos tomar os eixos ortogonais  $\mathbf{e}_i$  e definir a matriz  $g_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ . O produto interno  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  exprime-se como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^i \mathbf{e}_i) \cdot (v^j \mathbf{e}_j) = u^i v^j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} u^i v^j. \quad (1.16)$$

Podemos definir a distância entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  por

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (1.17)$$

Neste caso,

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = g_{ij} (u^i - v^i) (u^j - v^j). \quad (1.18)$$

### Definição 4. (Métrica)

A forma bilinear simétrica  $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  representada pelas componentes de matriz  $g_{ij}$  é chamada métrica de  $E$ . A matriz  $g_{ij}$  é simétrica e positiva definida, ou seja, para qualquer lista  $x^i$  de números reais não todos nulos,

$$g_{ij} x^i x^j \geq 0. \quad (1.19)$$

## 1.6 Funcionais lineares e covetores

Seja  $E$  um espaço vetorial. Uma transformação linear  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **funcional linear**. O conjunto de todos os funcionais lineares com domínio em

$E$  é também um espaço vetorial. Um funcional linear, portanto, age sobre um vetor e resulta em um número real ou, em nosso caso, em uma função escalar real.

Por outro lado, existe um tipo especial de funcional linear, denominado **covetor**. Para cada vetor  $\mathbf{u} \in E$ , existe um funcional linear  $\mathbf{u}^*$  tal que

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.20)$$

Sejam dois vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ , sendo  $\mathbf{v}^*$  e  $\mathbf{u}^*$  seus respectivos funcionais lineares. Temos

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.21)$$

Todo funcional linear que age sobre vetores tendo como regra o produto escalar é denominado **covetor**. O espaço de todos os covetores com domínio em  $E$  é denominado espaço dual de  $E$ , com o símbolo  $E^*$ .

Cada vetor está relacionado a seu próprio covetor por uma transformação linear, assim, como convenção, temos

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \iff \mathbf{v}^* = v_i \mathbf{e}^i. \quad (1.22)$$

O conjunto  $\{\mathbf{e}^i\}$ , com índices contravariantes, forma uma base para  $E^*$ .

Se um vetor é representado por uma matriz coluna, seu covetor é uma matriz linha. Neste caso, um vetor e seu covetor são transpostos um do outro. Assim,

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = v_i \mathbf{e}^i (v^j \mathbf{e}_j) = v_i v^j \mathbf{e}^i (\mathbf{e}_j). \quad (1.23)$$

Em razão de (1.20),

$$\mathbf{e}^i (\mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \quad (1.24)$$

portanto,

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{v}) = v_i v^i. \quad (1.25)$$

Para dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}) = u_i v^i = v_i u^i. \quad (1.26)$$

Se este é o produto interno,

$$u_i v^i = g_{ij} u^i v^j \implies u_i = g_{ij} u^j, \quad (1.27)$$

o que implica em que o isomorfismo entre  $E$  e  $E^*$  é dado pela métrica.

Por outro lado, suponha  $g^{ij}$  as componentes da inversa da métrica. Isto significa que

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i.$$

Multiplicando-se (1.27) por  $g^{ik}$ , temos

$$u_i g^{ik} = g_{ij} g^{ik} u^j = g_{ji} g^{ik} u^j = \delta_j^k u^j = u^k,$$

ou seja,

$$u^i = g^{ij} u_j. \quad (1.28)$$

No jargão dos físicos, dizemos que a métrica "baixa" índices, segundo (1.27), o que realmente quer dizer que componentes vetoriais podem ser levadas a componentes covetoriais. Por outro lado, a inversa da métrica "levanta" índices, transformando componentes de covetores em componentes de seus respectivos campos vetoriais.

Agora vamos voltar ao espaço euclidiano  $\mathbb{E}^3$ . A expressão (1.27) é explicitada por

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix},$$

ou seja, a métrica euclidiana é representada por uma matriz identidade

$$g_{ij} = \delta_{ij} \rightarrow g = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Agora, mostraremos sob que condições a operação de rotação  $y_i = R^i_j x^j$  preserva o produto escalar. Sejam dois vetores  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ . Temos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{ij} u^i v^j = u_i v^i,$$

segundo as equações (1.16) e (1.27). Sabemos que  $v^i$  se transformam por

$$v^i \rightarrow \bar{v}^i = R^i_j v^j,$$

mas não sabemos como se transformam as componentes covetoriais  $u_i$ . Se o produto escalar é preservado,  $u_i v^i = \bar{u}_i \bar{v}^i$ , ou seja,

$$\bar{u}_i \bar{v}^i = \bar{u}_i R^i_j v^j = \bar{u}_i R^i_j v^j,$$

ou seja,

$$u_j = \bar{u}_i R^i_j \implies \bar{u}_i = u_j (R^T)_i^j = R_i^j u_j. \quad (1.30)$$

Portanto, as componentes de covetores se transformam com a transposta da matriz de rotação.

Por outro lado, se covetores em si são invariantes por rotações, temos

$$y^i = R^i_j x^j \implies \bar{\mathbf{u}}^* = \mathbf{u}^*.$$

Assim,

$$\bar{\mathbf{u}}^* = \bar{u}_i \bar{\mathbf{e}}^i = R_i^j u_j \bar{\mathbf{e}}^i = u_j \bar{\mathbf{e}}^i R_i^j.$$

Como  $\bar{u}_i \bar{\mathbf{e}}^i = u_i \mathbf{e}^i$ ,

$$\mathbf{e}^j = \bar{\mathbf{e}}^i R_i^j \implies \bar{\mathbf{e}}^i = R^j_i \mathbf{e}^j. \quad (1.31)$$

Assim, as bases de covetores transformam-se como vetores, com a matriz de rotação.

Basta descobrir como as componentes da métrica se transformam. Se o produto interno é invariante, temos

$$g_{ij}u^i v^j = \bar{g}_{ij}\bar{u}^i \bar{v}^j = \bar{g}_{ij}R^i_k u^k R^j_l v^l = \bar{g}_{ij}R^i_k R^j_l u^k v^l.$$

Portanto,

$$g_{ij} = \bar{g}_{mn}R^m_i R^n_j \iff \bar{g}_{ij} = R^m_i R^n_j g_{mn}. \quad (1.32)$$

Assim se transformam as componentes da métrica por rotações.

No caso euclidiano,  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , o que indica que

$$\bar{\delta}_{ij} = R^m_i R^n_j \delta_{mn} = R^m_i R_{jm} = (R^T R)_{ij} = \delta_{ij}. \quad (1.33)$$

Isto significa que as componentes da métrica euclidiana são invariantes por rotações.

## 1.7 Posição, velocidade e aceleração

Fizemos menção ao fato de que o espaço euclidiano é seu próprio espaço vetorial. Esta característica nos permite definir um vetor para cada ponto de  $\mathbb{E}^3$ , que representa a distância entre a origem e este ponto. Este vetor é chamado vetor posição. É a partir desta característica que podemos representar vetores em  $\mathbb{E}^3$  por setas com tamanho, direção e sentido, algo que não é possível em **espaços não euclidianos**. Também podemos, sem risco de cometer nenhum abuso, pensar nos vetores como objetos do próprio espaço euclidiano, em vez de objetos definidos em espaços distintos deste. No geral, contudo, a posição de um ponto não pode ser representada por um vetor, e vetores não pertencem ao espaço de base, mas a espaços vetoriais próprios. O mesmo ocorre com covetores e tensores de qualquer ordem.

Portanto, a posição de uma partícula pontual que se move com o tempo pode ser representada por um campo vetorial

$$\mathbf{x}(t) = x^i(t) \mathbf{e}_i, \quad (1.34)$$

em que

$$x^i(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \end{pmatrix}$$

são as funções que definem a trajetória da partícula em  $\mathbb{E}^3$ . A distância entre uma dada posição e a origem é dada pela métrica  $g$ :

$$x = \sqrt{g(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{g_{ij}x^i x^j} = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = |\mathbf{x}|, \quad (1.35)$$

bem como a distância entre duas posições  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| &= \sqrt{g(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sqrt{g_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)} \\ &= \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

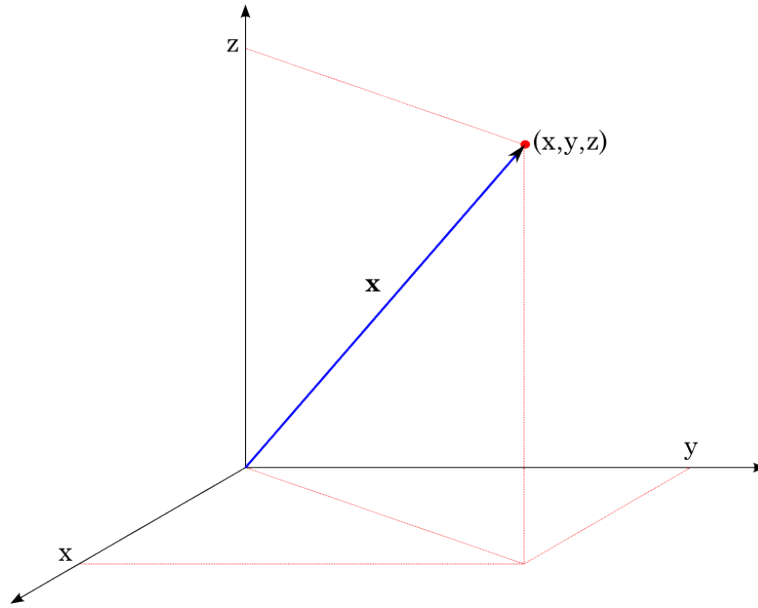


Figura 1.5: Vetor  $\mathbf{x}$  relacionado à posição  $(x, y, z)$ .

Vamos supor uma partícula que se move no espaço euclidiano de acordo com o vetor posição  $\mathbf{x}(t)$ . A velocidade da partícula é, então, definida como a primeira derivada temporal de  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{x}^i(t) \mathbf{e}_i. \quad (1.37)$$

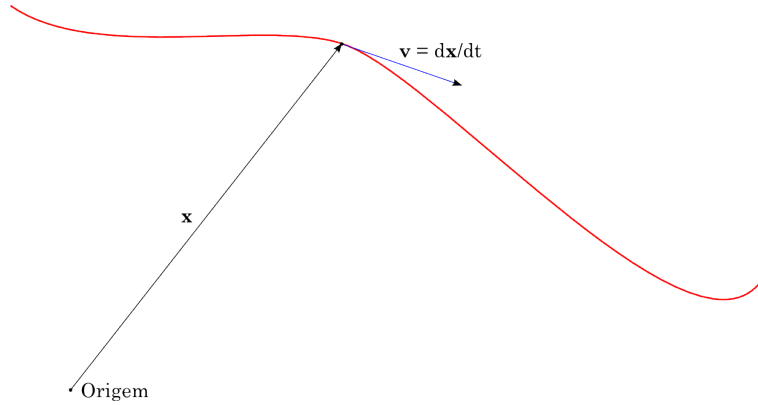


Figura 1.6: Os vetores posição  $\mathbf{x}$  e velocidade  $\mathbf{v}$  no ponto  $x$  da trajetória em vermelho.

Além do tempo  $t$ , a velocidade é também uma função da distância  $l$  ao longo da trajetória. Seja uma curva  $C \subset \mathbb{E}^3$  e dois pontos  $x(s_1)$  e  $x(s_2)$  que pertencem à curva, sendo  $s$  um parâmetro qualquer monotonicamente crescente.

A equação para a distância entre dois pontos, dada por

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{(\Delta x_i)(\Delta x^i)},$$

pode ser escrita para um elemento infinitesimal  $ds$  por

$$ds = \sqrt{dx_i dx^i} = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}. \quad (1.38)$$

Portanto, a distância entre  $x(s_1)$  e  $x(s_2)$  ao longo da curva é dada por

$$l(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{dx_i dx^i} = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{\frac{dx_i}{ds} \frac{dx^i}{ds}}.$$

Se  $s$  for escolhido como o tempo, temos

$$l = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}_i \dot{x}^i}. \quad (1.39)$$

Se  $l$  é tomado como parâmetro, então

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dl} \frac{dl}{dt}.$$

É sempre possível definir o parâmetro  $l$  de modo que o vetor

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dl}$$

seja unitário. Este vetor é um vetor tangente à trajetória no ponto  $l$ . Definindo, também, a quantidade

$$v \equiv \frac{dl}{dt},$$

podemos escrever

$$\mathbf{v}(t) = v \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.40)$$

Dessa forma,  $v$  é o módulo da velocidade, enquanto o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória da partícula.

Dada a definição (1.37), a aceleração da partícula é calculada por

$$\mathbf{a}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{x}^i(t) \mathbf{e}_i. \quad (1.41)$$

Tomando-se (1.40), temos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u} + v \frac{d\mathbf{u}}{dt}. \quad (1.42)$$

A aceleração de uma partícula está relacionada não só à mudança no módulo da velocidade ( $\dot{v}\mathbf{u}$ ), mas também à curvatura da trajetória ( $v\dot{\mathbf{u}}$ ). Note que, se  $\mathbf{u}$  é unitário,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

ou seja,

$$2\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.43)$$

e, portanto,  $\dot{\mathbf{u}}$  é ortogonal a  $\mathbf{u}$  e, por consequência, ortogonal à trajetória.

Definimos também o escalar de curvatura  $\kappa$ :

$$\kappa \equiv \left| \frac{d\mathbf{u}}{dl} \right|. \quad (1.44)$$

Assim,

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dl} \frac{dl}{dt} = v\kappa\hat{\mathbf{n}}, \quad (1.45)$$

em que  $\hat{\mathbf{n}} \equiv \dot{\mathbf{u}}/|\dot{\mathbf{u}}|$  é um vetor unitário. Neste caso,

$$\mathbf{a} = \dot{v}\hat{\mathbf{u}} + v^2\kappa\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.46)$$

O primeiro termo é chamado aceleração tangencial, enquanto o segundo é chamado aceleração centrífuga. A aceleração encontra-se em um plano formado por  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ , chamado plano osculante.

## 1.8 A dinâmica e as três leis de Newton

São de autoria de **Isaac Newton** os princípios fundamentais que determinam como os corpos se movem no espaço euclidiano. Podemos escrever esses princípios na forma das três **leis de Newton**:

1. Uma partícula pontual livre de forças externas não nulas move-se com velocidade constante.
2. A força aplicada a uma partícula pontual é diretamente proporcional à sua aceleração.
3. Quando uma partícula  $A$  executa uma força sobre uma segunda partícula  $B$ , a partícula  $A$  experimenta uma força que é igual em módulo e direção, mas cujo sentido é contrário à força original.

A primeira lei é chamada princípio da inércia, enquanto a terceira é conhecida como o princípio de ação e reação. A segunda lei, como veremos, é aquela que determina a dinâmica das partículas a partir do conhecimento da força que age sobre elas.

Desde que nossas noções intuitivas sobre força não sejam equivocadas, não há nada de errado com as formulações clássicas das três leis de Newton. Contudo, podemos fazer uma releitura desses princípios, de modo que uma definição apropriada de força seja incluída e o propósito de ter em mãos princípios da dinâmica mais consistentes matematicamente seja atingido.



## Sistemas referenciais

Na física, podemos trabalhar fundamentalmente com quatro objetos fundamentais: O sistema físico, o observador, o observável e a medida. Uma definição de sistema físico é bastante óbvia para os nossos propósitos, é simplesmente um objeto físico do qual desejamos obter informações. Um observável é um objeto matemático que carrega informação sobre o sistema físico. Por exemplo, se o sistema é uma partícula, exemplos de observáveis que já conhecemos podem ser sua velocidade  $\mathbf{v}(x)$  e aceleração  $\mathbf{a}(x)$  em um ponto  $x \in \mathbb{E}^3$ . A medida é um valor numérico assumido pelo observável. Por exemplo, se o observável é a velocidade, uma possível medida vem a ser 10 metros por segundo.

Um observador, por outro lado, consiste em um ente físico, como um pesquisador munido de um aparelho de medida, que executa medidas sobre o sistema físico. Observadores também são sistemas físicos por natureza, portanto eles possuem posições, velocidades e acelerações com relação ao sistema físico em  $\mathbb{E}^3$ . Para que um observador faça uma medida em um sistema, é necessário que ele adote um sistema de coordenadas.

Neste caso, podemos definir um sistema **referencial** como um observador  $\mathcal{O}$  munido de um sistema de coordenadas  $\{x\} \subset \mathbb{E}^3$ , formando um conjunto  $(\mathcal{O}, \{x\})$ . Um sistema de coordenadas em si não define um sistema referencial, como veremos em diversos exemplo práticos durante este curso: Um único observador pode se utilizar de dois ou mais sistemas de coordenadas para executar uma medida, assim como um mesmo sistema de coordenadas pode ser utilizado por dois observadores distintos. Na mecânica newtoniana, como veremos, as medidas de observáveis físicos dependem intrinsecamente do sistema referencial utilizado, como por exemplo a posição, velocidade, aceleração, bem como a energia, momento linear e momento angular. Sempre que um observável é estudado, devemos definir explicitamente qual sistema referencial é utilizado.

## 1.9 Princípios da inércia e conservação do movimento

### Referenciais inerciais

O princípio de inércia tradicional pode ser substituído pela seguinte definição:

**Definição 5.** (Referencial inercial)

Existem sistemas referenciais especiais, denominados **referenciais inerciais**, que possuem as seguintes propriedades:

1. Um referencial inercial mede toda partícula isolada como movendo-se com velocidade constante.
2. Se uma partícula isolada é observada com velocidade constante em um referencial, ela é observada com velocidade constante em qualquer outro referencial inercial.

Esta definição difere da apresentação anterior da primeira lei em um aspecto importante. Substitui o conceito de força (ou ausência de), por um conceito mais preciso, o de partículas isoladas. Neste contexto, uma partícula isolada

é aquela longe o suficiente de qualquer outra partícula (ou campo), que possa com ela interagir.

De fato, a existência de um referencial inercial implica na existência de infinitos referenciais inerciais, todos medindo uma partícula isolada como aquela em movimento retilíneo uniforme. Dizemos, também, que tal partícula é livre, ou inercial.

## Conservação da quantidade de movimento

Por outro lado, segunda e terceira leis podem ser substituídas pelo seguinte princípio:

**Proposição 2.** (*Princípio da conservação do movimento*)

Sejam  $n$  partículas  $I$  que interagem entre si, mas são isoladas em conjunto, observadas por um observador inercial. Seja  $\mathbf{v}_I(t)$  a velocidade da partícula  $I$ , sendo  $I = 1, \dots, n$ . Então:

1. Existe uma combinação linear positiva definida das velocidades tais que o vetor resultante é uma constante no tempo, ou seja,

$$\exists m_I \in \mathbb{R}_+ : \sum_I m_I \mathbf{v}_I(t) = \mathbf{p}, \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (1.47)$$

2. As constantes  $m_I$  são independentes do tempo, do sistema referencial escolhido e da natureza da interação. Dependem apenas das partículas.

Para os índices  $I$ , não usaremos a convenção de soma. Com a proposição 2, podemos prosseguir com as seguintes definições:

**Definição 6.** (Massa e momento linear)

As constantes  $m_I$  são definidas como as **massas** inerciais referentes às partículas  $I$ . O vetor  $\mathbf{p}$ , por outro lado, é denominado quantidade de movimento, momento linear, ou simplesmente **momento** do sistema.

Vamos considerar, por simplicidade, o exemplo de duas partículas isoladas. Temos

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

Neste caso, definimos o momento de cada partícula como

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2,$$

de modo que

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Evidentemente, se as velocidades são vetores por rotações, os momentos também o são.

Se  $\mathbf{p}$  é constante, temos

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \implies \frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0,$$

ou seja,

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0.$$

Voltando ao sistema de  $n$  partículas, as expressões anteriores resultam em

$$\mathbf{p} = \sum_I \mathbf{p}_I, \quad \mathbf{p}_I = m_I\mathbf{v}_I, \quad (1.48)$$

bem como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \implies \sum_I m_I\mathbf{a}_I = 0, \quad (1.49)$$

## 1.10 Observáveis dinâmicos fundamentais

### Força

Da equação (1.49), vemos que a conservação do momento implica em que a soma da massa vezes a aceleração de cada partícula deve ser nula. Podemos definir

**Definição 7.** (Força)

A força que age sobre uma partícula  $I$  de momento linear  $\mathbf{p}_I$  e massa  $m_I$  constante é dada por

$$\mathbf{F}_I = \frac{d\mathbf{p}_I}{dt} = m_I\mathbf{a}_I. \quad (1.50)$$

Note que  $\mathbf{F}$  é também um vetor por rotações. Dessa forma, a conservação do momento implica em

$$\sum_I \mathbf{F}_I = 0 \quad (1.51)$$

para um sistema de partículas isolado. A definição (1.50) é equivalente à segunda lei de Newton.

Voltando ao sistema de duas partículas, (1.51) resulta em

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \quad (1.52)$$

ou seja, a força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é igual ao negativo da força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2. Esta é a expressão matemática da terceira lei de Newton na forma forte.

## Energia

Vamos tomar o caso de uma partícula de massa  $m$  sobre a qual age uma força  $\mathbf{F}$ . Neste caso, a dinâmica é dada pela equação

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{x}}, \quad (1.53)$$

ou seja, conhecida a força  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ , (1.53) torna-se um sistema de três equações diferenciais ordinárias para o vetor posição. Em notação tensorial, temos

$$F^i = m\ddot{x}^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.54)$$

Vamos tomar o produto escalar de (1.53) por  $\mathbf{v}$ , que resulta em

$$F_i v^i = m\ddot{x}_i v^i = m\ddot{x}_i \dot{x}^i.$$

Note que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}^i \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \dot{x}^i) = m\ddot{x}_i \dot{x}^i,$$

portanto,

$$F_i \dot{x}^i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}^i \right). \quad (1.55)$$

Em notação vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right). \quad (1.56)$$

**Definição 8.** (Energia cinética)

A quantidade

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \quad (1.57)$$

é denominada energia cinética de uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $\dot{\mathbf{x}}$ .

Da equação (1.56) vemos que, se a força é ortogonal à velocidade, a energia cinética se conserva. Ou seja,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \implies \quad \frac{dK}{dt} = 0. \quad (1.58)$$

Este caso inclui o da partícula livre, em que  $\mathbf{F} = 0$ .

Vamos supor que a força  $\mathbf{F}$  seja derivada de um potencial, ou seja,

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (1.59)$$

em que  $\nabla$  é o operador gradiente:

$$\nabla V \rightarrow \left( \frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) \equiv \frac{\partial V}{\partial x^i} = \partial_i V. \quad (1.60)$$

Então, (1.55) resulta em

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}^i \right) = F_i \dot{x}^i = -\dot{x}^i \partial_i V = -\frac{dx^i}{dt} \frac{\partial V}{\partial x^i} = -\frac{dV}{dt}. \quad (1.61)$$

Neste caso,

$$\frac{d}{dt} (K + V) = 0. \quad (1.62)$$

Portanto, se a força é derivada de um potencial, temos uma constante de movimento:

**Definição 9.** (Energia mecânica)

O escalar

$$E = K + V \quad (1.63)$$

é denominado energia mecânica da partícula, quando é uma constante de movimento. O escalar  $V$ , cujo gradiente é o negativo da força que age sobre a partícula, é denominado energia potencial.

A energia mecânica é a primeira quantidade conservada que encontramos na mecânica newtoniana. Sua própria definição depende de sua invariância temporal: estritamente, não se define energia mecânica de sistemas cuja força não se derive de um potencial (salvo algumas exceções).

## Trabalho

Vamos supor uma partícula de massa  $m$  submetida a uma força  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , ou seja, que dependa apenas da posição, mas não da velocidade ou do tempo. A partícula executa uma trajetória  $\gamma \subset \mathbb{E}^3$  definida pelo vetor posição  $\mathbf{x}(t)$ . Podemos integrar a força ao longo da trajetória, o que resulta na integral de linha

$$W[\gamma] = \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.64)$$

Temos:

**Definição 10.** (Trabalho)

O funcional  $W : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$  definido em (1.64) é o trabalho executado pela força na trajetória  $\gamma$ , entre os pontos  $\mathbf{x}(t_0)$  e  $\mathbf{x}(t_1)$ .

Agora, vamos estudar o seguinte teorema:

**Teorema 1.** (Teorema trabalho-energia cinética)

O trabalho realizado por uma força  $\mathbf{F}(x)$  é igual à diferença entre as energias cinética final e inicial da partícula.

Demonstração: Note que

$$\int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt$$

e, como vimos em (1.56),

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right) = \frac{dK}{dt}.$$

Então,

$$\int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t_1)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dK}{dt} = K(\mathbf{x}(t_1)) - K(\mathbf{x}(t_0)).$$

Portanto,

$$W[C] = K(t_1) - K(t_0) = \Delta K. \quad \square \quad (1.65)$$

No geral, o trabalho entre dois pontos depende da trajetória, o que torna difícil calcular o lado direito de (1.65) sem conhecer a trajetória em si. Existem forças, contudo, que não possuem este problema:

**Definição 11.** (Forças conservativas)

Forças conservativas são aquelas cujo trabalho independe da trajetória.

Vamos supor dois pontos  $A$  e  $B$  e duas curvas  $C_1$  e  $C_2$  distintas conectando ambos os pontos. Para que o trabalho não dependa da trajetória, temos

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Portanto,

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Esta expressão significa que o trabalho de  $A$  a  $B$  sobre a curva  $C_2$  é igual à negativa do trabalho de  $A$  a  $B$  pela curva  $C_1$ . Por sua vez, esta última integral é igual à negativa da integral de  $B$  a  $A$  sobre  $C_1$ . Dessa forma, sabendo-se que  $C_1$  e  $C_2$  formam, juntas, uma trajetória fechada  $C$ ,

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (1.66)$$

Uma força é conservativa, portanto, quando o trabalho realizado sobre qualquer trajetória fechada é nulo.

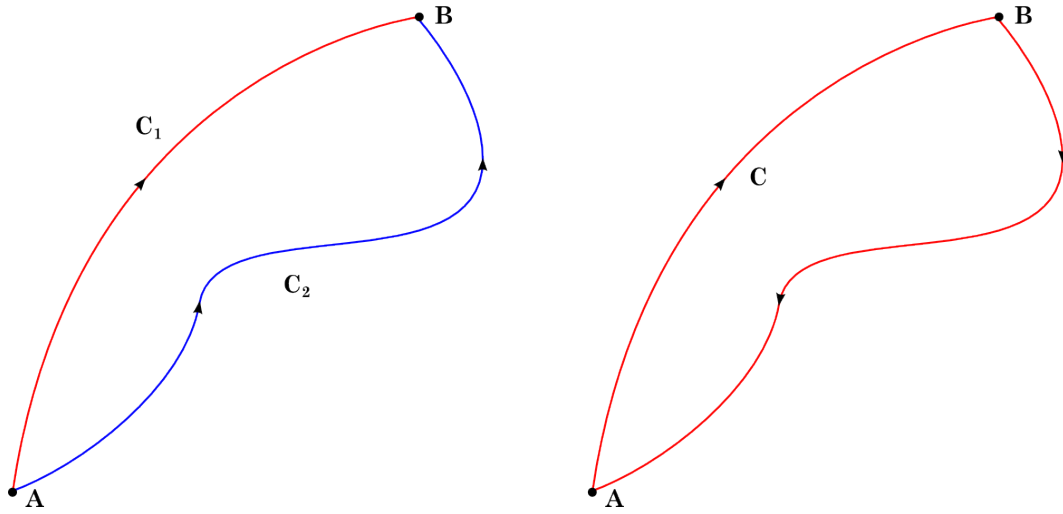


Figura 1.7: O trabalho de uma força conservativa: À esquerda, se o trabalho calculado entre os pontos  $A$  e  $B$  é o mesmo para duas trajetórias quaisquer  $C_1$  e  $C_2$ , implica-se que o trabalho em qualquer trajetória  $C$  fechada (à direita) é nulo.

O teorema de Stokes, por outro lado, nos mostra que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma, \quad (1.67)$$

em que  $\nabla \times \mathbf{F}$  é o rotacional do campo  $\mathbf{F}$ ,  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície bidimensional cuja fronteira é  $C$  (dizemos que  $C = \partial\Sigma$ ),  $d\sigma$  é um elemento de área de  $\Sigma$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  é um vetor unitário ortogonal a  $\Sigma$  em cada ponto.

Note que  $\Sigma$  pode ser simplesmente qualquer superfície cuja fronteira seja a curva fechada  $C$ . Portanto

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0 \implies \nabla \times \mathbf{F} = 0. \quad (1.68)$$

Dizemos, assim, que toda força irrotacional é conservativa.

Além disso, todo vetor euclidiano tridimensional pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_T + \mathbf{A}_L,$$

em que os vetores transversal  $\mathbf{A}_T$  e longitudinal  $\mathbf{A}_L$  obedecem às equações

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_T = 0, \quad \nabla \times \mathbf{A}_L = 0.$$

Este é o conhecido **teorema de Helmholtz**. Este teorema pode ser utilizado para provar que, se  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial irrotacional, então

$$\mathbf{F} = -\nabla V, \quad (1.69)$$

em que  $V$  é um escalar. Então, toda força conservativa é proporcional ao gradiente de um potencial.

Agora, vamos supor uma força conservativa  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  e dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma curva  $C$ . O trabalho realizado pela força é dado por

$$W[C] = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

Com (1.69), temos

$$W[C] = - \int_{\mathbf{x}_A}^{\mathbf{x}_B} d\mathbf{x} \cdot \nabla V(\mathbf{x}) = -[V(\mathbf{x}_B) - V(\mathbf{x}_A)] = V(\mathbf{x}_A) - V(\mathbf{x}_B). \quad (1.70)$$

Do teorema trabalho-energia cinética, temos

$$W[C] = K(\mathbf{x}_B) - K(\mathbf{x}_A),$$

Portanto,

$$V(\mathbf{x}_A) - V(\mathbf{x}_B) = K(\mathbf{x}_B) - K(\mathbf{x}_A),$$

ou,

$$V(\mathbf{x}_A) + K(\mathbf{x}_A) = V(\mathbf{x}_B) + K(\mathbf{x}_B), \quad (1.71)$$

que é uma forma global da conservação da energia mecânica  $E$  (vide eqs. (1.62) e (1.63)).

## 1.11 Rotações infinitesimais e Momento angular

O momento angular é outra quantidade dinâmica que pode ser conservada a depender do tipo de força e da trajetória do sistema físico. Sua relação com a transformação de rotação será melhor compreendida durante o curso, mas podemos, desde já, dar pistas de seu comportamento quantitativo.

Vamos começar com a transformação

$$x^i \rightarrow x'^i = R^i_j x^j,$$

em que

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que caracteriza uma rotação passiva com ângulo  $\theta$  e eixo  $z$  no sentido anti-horário. Note que as funções trigonométricas podem ser expandidas em série, de modo que

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1},$$

enquanto

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \theta^{2k}.$$



Vamos supor que  $\theta$  é infinitesimal, o que neste caso denotaremos com o símbolo  $\delta\theta$ . Isto significa que  $\delta\theta \ll 1$  e, assim, os termos de menor ordem de ambas as séries são dominantes. Assim, a matriz

$$r_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

carrega uma transformação infinitesimal, que podemos escrever por

$$r_z(\delta\theta) = \mathbf{1} + J_z \delta\theta^z,$$

sendo

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesta estrutura, a matriz  $J_z$  é denominada geradora de rotações no eixo  $z$ . Por outro lado, rotações infinitesimais nos eixos  $x$  e  $y$  são facilmente verificadas por

$$r_x(\delta\theta) = \mathbf{1} + J_x \delta\theta^x, \quad r_y(\delta\theta) = \mathbf{1} + J_y \delta\theta^y,$$

com geradores

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma rotação infinitesimal arbitrária em três dimensões dependerá de três ângulos, que tomaremos por  $\delta\theta^i \equiv (\delta\theta^x, \delta\theta^y, \delta\theta^z)$ . Neste caso,

$$r(\delta\theta) = \mathbf{1} + J_i \delta\theta^i,$$

com soma em  $i$ . No caso em que um eixo  $\hat{\mathbf{n}}$  é definido, temos

$$r_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\theta) = \mathbf{1} + J_i n^i \delta\theta.$$

Note que os geradores de rotações, as três matrizes  $J_i$ , possuem componentes

$$(J_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk},$$

em que  $\epsilon_{ijk}$  são denominados símbolos antissimétricos de Levi-Civita:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) = (123), (231), \text{ ou } (312), \\ 0 & \text{se } i = j, j = k, \text{ ou } k = i, \\ -1 & \text{se } (ijk) = (132), (213), \text{ ou } (321). \end{cases}$$

Neste caso, a matriz de rotação infinitesimal tem componentes

$$r^j_k = \delta^j_k + (J_i)^j_k \delta\theta^i = \delta^j_k - \epsilon^{ij}_k \delta\theta_i.$$

Vamos aplicar esta matriz em um vetor posição:

$$r^i_j x^j = x^i - \delta\theta_k \epsilon^{ki}_j x^j = x'^i.$$

Assim, definimos o deslocamento infinitesimal

$$\delta x^i = x'^i - x^i = -\epsilon^{ki} x^j \delta \theta_k = -\epsilon^{ijk} x_j \delta \theta_k.$$

Tomemos, agora, a segunda lei:

$$F_i = m\ddot{x}_i = \frac{dp_i}{dt}.$$

Ao contrair esta equação, ou seja, executar o produto escalar com a seguinte quantidade:

$$\delta x^i = -\epsilon^{ijk} x_j \delta \theta_k, \quad (1.72)$$

temos

$$F_i \delta x^i = \frac{dp_i}{dt} \delta x^i = -\frac{dp_i}{dt} \epsilon^{ijk} x_j \delta \theta_k. \quad (1.73)$$

Podemos escrever

$$-\frac{dp_i}{dt} \epsilon^{ijk} x_j \delta \theta_k = \frac{d}{dt} (-\epsilon^{ijk} x_j p_i) \delta \theta_k = \delta \theta_i \left[ \frac{d}{dt} (\epsilon^{ijk} x_j p_k) - m \epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k \right].$$

O segundo termo entre as chaves é nulo, devido ao seguinte teorema:

**Teorema 2.** *A contração de uma quantidade simétrica e uma quantidade antissimétrica é identicamente nula.*

*Demonstração.* Vamos tomar primeiro o caso geral de uma quantidade simétrica  $A_{ij}$  e uma quantidade antissimétrica  $B_{ij}$ . Neste caso,  $A_{ij} = A_{ji}$  e  $B_{ij} = -B_{ji}$ . Ao contrairmos completamente  $A$  e  $B$ , obtemos  $A_{ij} B^{ij}$ . Como  $A$  é simétrico,  $A_{ij} B^{ij} = A_{ji} B^{ij}$ . Como  $B$  é antissimétrico,  $A_{ji} B^{ij} = -A_{ji} B^{ji}$ . Contudo, como  $i$  e  $j$  são índices mudos, podemos trocá-los, de modo que  $-A_{ji} B^{ji} = -A_{ij} B^{ij}$ . Porém, isto implica em  $A_{ij} B^{ij} = -A_{ij} B^{ij}$ , portanto,  $A_{ij} B^{ij} = 0$ .  $\square$

Vamos demonstrar isto, considerando a contração  $\epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k$ . Primeiro, note que  $\dot{x}_j \dot{x}_k = \dot{x}_k \dot{x}_j$ , ou seja, as componentes de um mesmo covetor (ou vetor), comutam entre si. Neste caso,  $\epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k = \epsilon^{ijk} \dot{x}_k \dot{x}_j$ . Agora, vamos renomear os índices mudos. Substituiremos  $k$  por  $m$ , resultando a expressão em  $\epsilon^{ijm} \dot{x}_m \dot{x}_j$ . Em segundo lugar trocaremos  $j$  por  $k$ , resultando em  $\epsilon^{ikm} \dot{x}_m \dot{x}_k$ . Agora, trocaremos  $m$  por  $j$ , resultando em  $\epsilon^{ikj} \dot{x}_j \dot{x}_k$ . Neste caso, como  $\epsilon$  é completamente antissimétrico, temos que  $\epsilon^{ikj} = -\epsilon^{ijk}$  e, assim,

$$\epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k = \epsilon^{ikj} \dot{x}_j \dot{x}_k = -\epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k,$$

o que implica em  $\epsilon^{ijk} \dot{x}_j \dot{x}_k = 0$ .

O termo na derivada temporal é dado por

$$\epsilon^{ijk} x_j p_k = (\mathbf{x} \times \mathbf{p})^i,$$

ou seja, são as componentes do produto vetorial entre o vetor posição  $\mathbf{x}$  e o momento  $\mathbf{p}$ .

**Definição 12.** (Momento angular)

O momento angular de uma partícula em um ponto  $x \in \mathbb{E}^3$  é definido por

$$\mathbf{L}(x) \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p}(x). \quad (1.74)$$

Em notação tensorial, escrevemos

$$L^i = \epsilon^{ijk} x_j p_k. \quad (1.75)$$

Com esta definição, a equação (1.73) torna-se

$$\delta\theta_i \frac{d}{dt} (\epsilon^{ijk} x_j p_k) = F_i \delta x^i = -F_i \epsilon^{ijk} x_j \delta\theta_k = \epsilon^{ijk} x_i F_j \delta\theta_k,$$

sendo  $\epsilon^{ijk} x_i F_j = \epsilon^{kij} x_i F_j = (\mathbf{x} \times \mathbf{F})^k$ .

**Definição 13.** (Torque)

Seja  $\mathbf{x}$  a posição de uma partícula como referência de origem um ponto fixo, e uma força  $\mathbf{F}$  aplicada no ponto  $\mathbf{x}$ . O torque de  $\mathbf{F}$  em  $\mathbf{x}$  é definido por

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (1.76)$$

Neste caso, (1.73) torna-se

$$\delta\theta_i \frac{d}{dt} (L^i) = \delta\theta_i (\mathbf{x} \times \mathbf{F})^i.$$

Como  $\delta\theta_i$  são linearmente independentes, temos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \quad (1.77)$$

Outra forma de se chegar a (1.77) é tomar a derivada temporal do momento angular:

$$\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}).$$

Contudo,

$$\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}(\mathbf{x}) = m\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

portanto,

$$\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}), \quad (1.78)$$

que é a definição de torque no ponto  $\mathbf{x}$ . Portanto, em coordenadas cartesianas, o torque é a derivada temporal do momento angular. Se o torque, como medido por um referencial inercial com sistema cartesiano é nulo, temos

$$\dot{\mathbf{L}} = 0, \quad (1.79)$$

ou seja, o momento angular se conserva.

Uma dedução da relação entre torque e momento angular mais curta e sem a relação explícita com a operação de rotações pode ser obtida com o produto vetorial simples entre a posição e a segunda lei de Newton:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \times \mathbf{F} &= m\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{x} \times \frac{d}{dt}\dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{dt}(m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) - m\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.\end{aligned}$$

Note que as definições de torque e momento angular são, respectivamente, as relações (1.74) e (1.76), de modo que o torque não é definido como a derivada do momento angular. Na verdade, a relação (1.78) requer um referencial inercial com um sistema de coordenadas cartesiano. Em outros sistemas de coordenadas, não esperamos que (1.78) seja verdadeira.