# oscilatorio

September 27, 2019

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

[2]:
```
# constantes generales
g= 9.81 # [m/s^2]
```

## 1 Movimiento oscilatorio armónico

Víctor A. Bettachini

### 1.1 Péndulo ideal

A efectos de presentar código Python útil para graficar la respuesta temporal de sistemas a continuación se muestra un ejemplo para la dinámica del péndulo ideal según $\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega t + \phi_0)$.

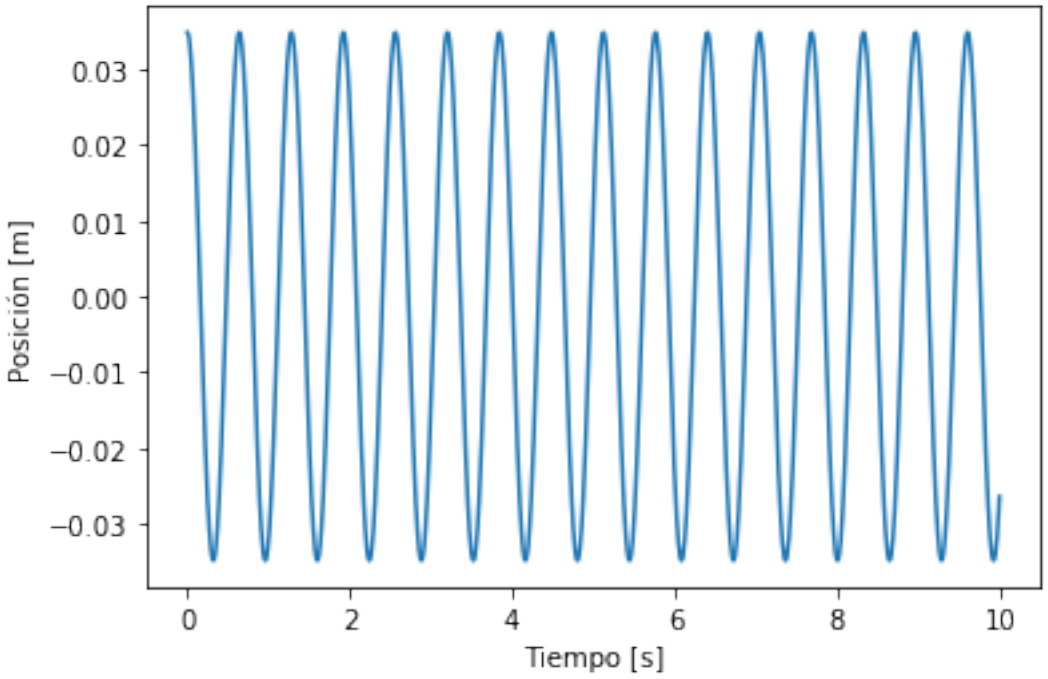
La amplitud en el tiempo inicial $\psi_0$ se nota con la variable `pen_0`. La fase $\phi_0$ como `phi_0`.

[3]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones iniciales péndulo
pen_0= 2 # [m] amplitud inicial
pen_0*= np.pi/180 # grados -> radianes
phi_0= 0 # fase inicial
l=1 #  [m] longitud de la cuerda
```

[4]:
```
# Función que define la dinámica del péndulo
omega= g/l # frecuencia de oscilación
def pen(t):
    return pen_0 *np.cos(omega*t+phi_0)
```

[5]:
```
# graficación péndulo
tempo= np.linspace(0,10,int(1E3))
outPen= pen(tempo)
plt.plot(tempo,outPen)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
```

[5]:
```
Text(0.5, 0, 'Tiempo [s]')
```




### 1.2 Oscilador sin resistencia

Si la posición de una masa $x$ es la de equilibrio $x_0$ mas un apartamiento $\psi$, y la fuerza $\vec{F} = m\ddot{x}\hat{x}$ entonces $\vec{F} = m\ddot{\psi}$.

Un resorte de constante elástica $k$ provee la fuerza, por tanto $-k\psi = m\ddot{\psi}$. De aquí se despeja $\ddot{\psi} = \omega\psi$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Propuesta la solución $\psi(t) = Ce^{\lambda t}$ queda $(\lambda^2 + \omega^2)Ce^{\lambda t} = 0$. Luego $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ y entonces $\psi(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_1 e^{-i\omega t}$.

Haciendo uso de la igualdad de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, agrupamos para obtener $\psi(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$.

Este conjunto de constantes puede determinarse usando los datos a tiempo inicial $\psi(0) = C_1 + C_2$ y $\dot{\psi}(0) = i(C_1 - C_2)\omega$.

Por tanto

$$\psi(t) = \psi(0)\cos\omega t + \frac{\dot{\psi}(0)}{\omega}\sin\omega t.$$

Esto puede ser escrito con una fase $\phi = \arctan\left(\frac{\dot{\psi}(0)}{\omega\psi(0)}\right)$ y amplitud $U = \sqrt{\psi^2(0) + \left(\frac{\dot{\psi}(0)}{\omega}\right)^2}$, quedando

$$\psi(t) = U\cos(\omega t + \phi).$$

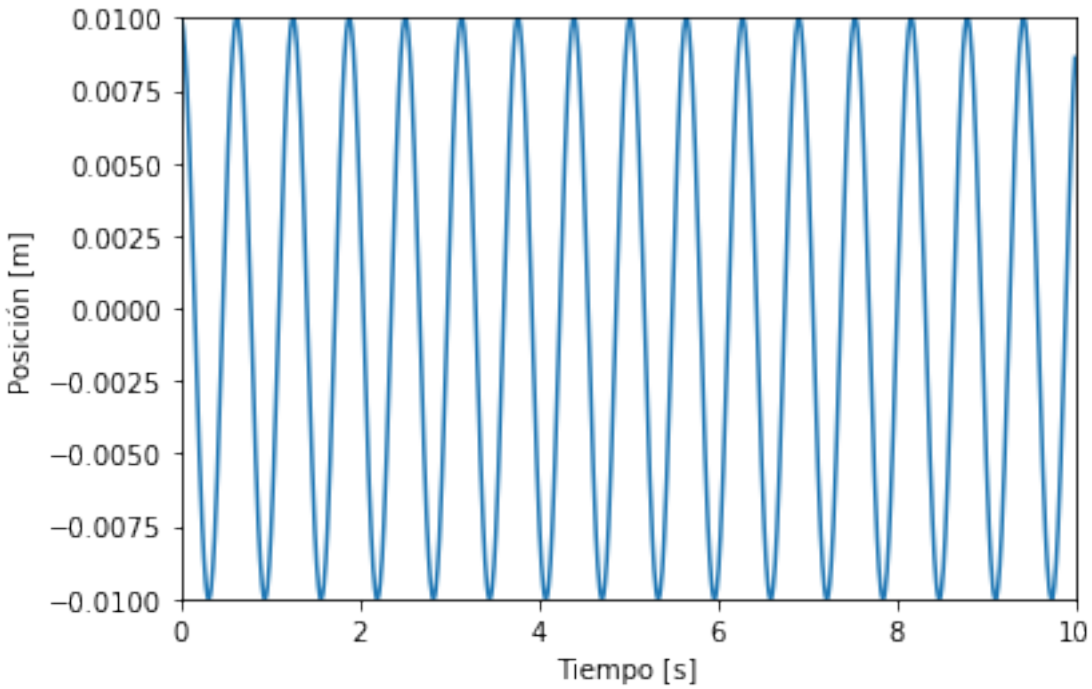
[6]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones oscilador
m= 1E-1 # [kg] masa oscilador
k= 1 # [N/m] constante elástica resorte
psi_0= 1E-2 # [m] amplitud oscilación a tiempo inicial
```

```
ppsi_0= 0E-2 # [m/s] velocidad oscilación a tiempo inicial
```

[7]:
```
# Función que define la dinámica del oscilador
omega= k/m
def psiOsc(t):
    return psi_0 *(np.cos(omega*t)+ (ppsi_0/omega)* np.sin(omega* t) )
```

[8]:
```
# graficación oscilador
tiempo= 10 # [s]
tempo= np.linspace(0,10,int(1E3))
outOsc= psiOsc(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0,psi_0])
plt.plot(tempo,outOsc)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
```

[8]:
```
Text(0.5, 0, 'Tiempo [s]')
```




### 1.3 Oscilador amortiguado

Se agrega una fuerza opuesta y proporcional a la velocidad $-c\dot{\psi}$, así la 2.a ley queda $m\ddot{\psi} = -c\dot{\psi} - k\psi$ y entonces $\ddot{\psi} + \frac{c}{m}\dot{\psi} + \omega^2\psi = 0$.

Usualmente se denomina $\Gamma = \frac{c}{m}$ así $\lambda_{1,2} = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega^2}$. De acuerdo a si el valor dentro de la raíz $\omega' = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega^2}$ es negativo, positivo o nulo se presentan distintas dinámicas.

### 1.3.1 Oscilador subamortiguado

Si el amortiguamiento es débil, $\frac{\Gamma}{2} < \omega$, entonces subsiste el comportamiento oscilatorio, $\omega' = i\sqrt{\left|\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega^2\right|}$ y la dinámica responde a $\psi(t) = A_1 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos|\omega'|t + A_2 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \sin|\omega'|t$.

Contemplando las condiciones iniciales esta solución usualmente se escribe

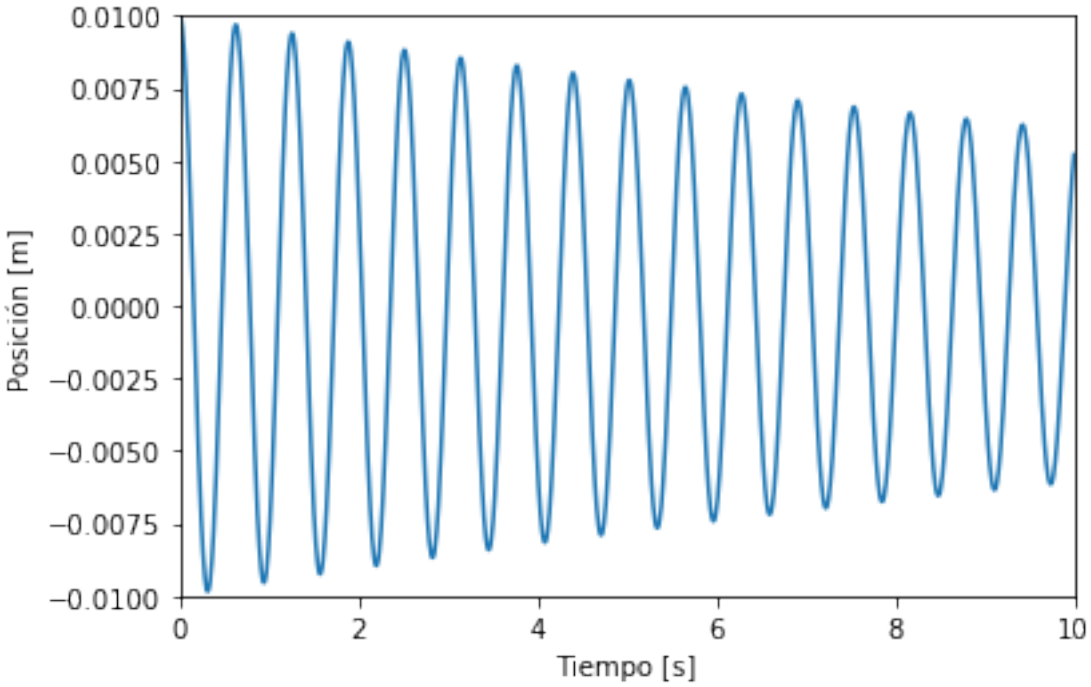
$$\psi(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\psi(0)\cos\omega' t + \frac{\dot{\psi}(0) + \frac{\Gamma}{2}\psi(0)}{\omega'}\sin\omega' t\right),$$

donde aquí $\omega'$ se refiere al valor absoluto de la raíz.

[9]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones adicionales subamortiguado
c= 1E-2 # [kg/s^2]
gamma= c/m # [1/s]
omegaPrima= np.sqrt(np.abs((gamma/2)**2- omega**2))
```

[10]:
```
# dinámica del subamortiguado
def psiOscSub(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cos(omegaPrima*t)+ ((ppsi_0+
 ↪(gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sin(omegaPrima* t) )
```

[11]:
```
# graficación subamortiguado
outOscSub= psiOscSub(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0,psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSub)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.savefig('subamortiguado.svg')
```



### 1.3.2 Oscilador sobreamortiguado

Si por el contrario el amortiguamiento prima sobre la oscilación, $\frac{\Gamma}{2} > \omega$, los valores de $\omega'$ son reales. Basta recordar que $e^{\pm\theta} = \cosh\theta \pm \sinh\theta$ para arribar a la solución,

$$\psi(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left(\psi(0)\cosh\omega' t + \frac{\dot{\psi}(0) + \frac{\gamma}{2}\psi(0)}{\omega'}\sinh\omega' t\right),$$

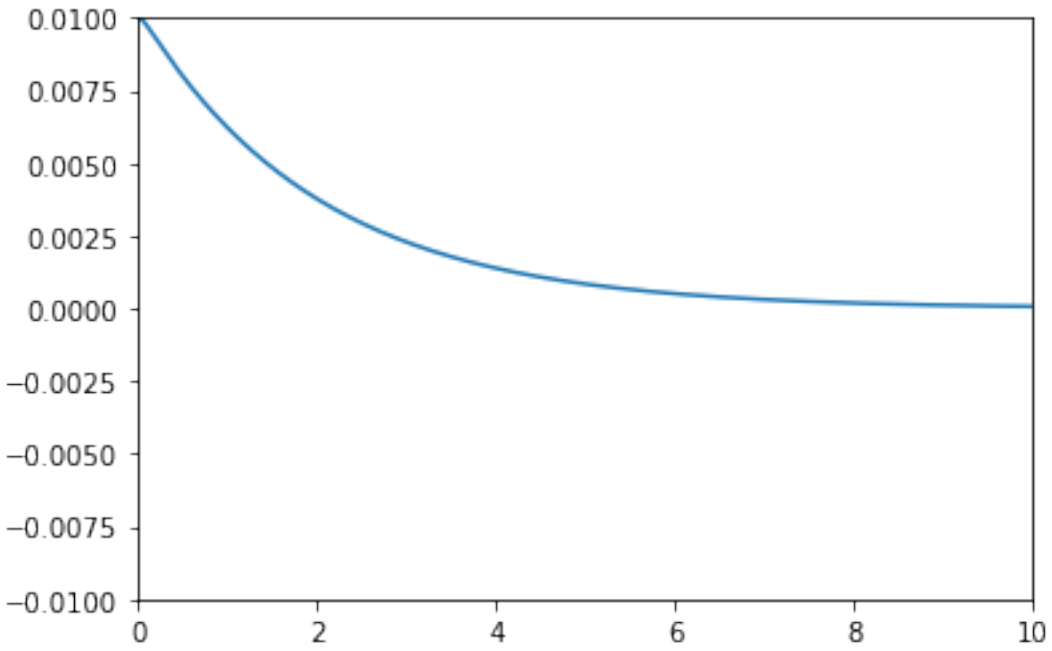
ahora con $\omega'$ real.

[12]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones adicionales sobremortiguado
c= 2.1E0# [kg/s^2]
gamma= c/m # [1/s]
```

[13]:
```
# dinámica del sobremortiguado
def psiOscSob(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cosh(omegaPrima*t)+ ((ppsi_0+
 ↪(gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sinh(omegaPrima* t)  )
```

[14]:
```
# graficación sobreamortiguado
outOscSob= psiOscSob(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0, psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSob)
```

[14]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0xac72a8ac>]
```



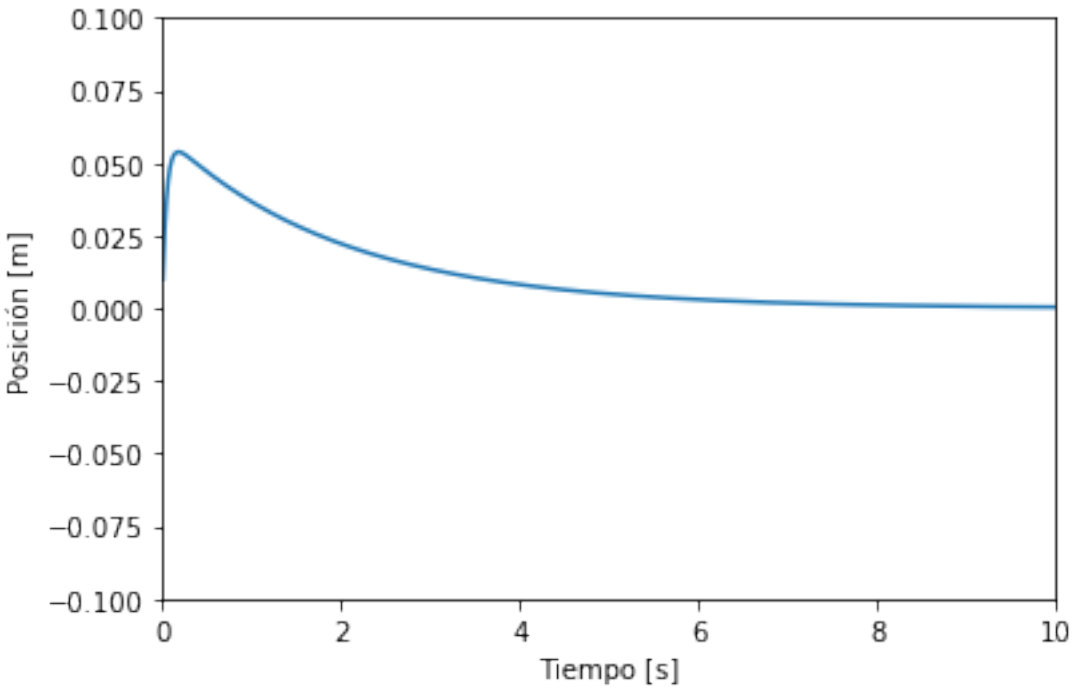
**Sobreamortiguado con velocidad inicial**

[15]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones adicionales subamortiguado - con velocidad inicial
c= 2.1E0# [kg/s^2]
gamma= c/m # [1/s]
ppsi_0= 1E0 # [m/s] velocidad inicial
```

[16]:
```
# dinámica sobreamortiguado
def psiOscSobVel(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cosh(omegaPrima*t)+ ((ppsi_0+(gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sinh(omegaPrima* t)  )
```

[17]:
```
# graficación sobreamortiguado
outOscSobVel= psiOscSobVel(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-10*psi_0, 10*psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSobVel)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
```

[17]:
```
Text(0.5, 0, 'Tiempo [s]')
```




### 1.3.3 Oscilador críticamente amortiguado

El caso en que $\frac{\Gamma}{2} = \omega$ hace que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$, así $\psi(t) = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\omega t}$. La dinámica termina siendo dada por

$$\psi(t) = [\psi(0) + (\dot{\psi}(0) + \omega\psi(0)t)]\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

[18]:
```
# PARÁMETROS MODIFICABLES: condiciones adicionales críticamente amortiguado
gamma= 2* omega # [1/s]
```

[19]:
```
# dinámica críticamente amortiguado
def psiOscCrit(t):
    return (psi_0+ (ppsi_0+ omega* psi_0)* t)* np.exp(-omega* t)
```

[20]:
```
# graficación críticamente amortiguado
outOscCrit= psiOscCrit(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0, psi_0])
plt.plot(tempo,outOscCrit)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
```

[20]:
```
Text(0.5, 0, 'Tiempo [s]')
```