Électromagnétisme II

Andrés Briones[1] and Sabastian Charles Jan Granberg Cauchi[1]

[1]University of Geneva

17 août 2020

Résumé

Ce document est en cours de rédaction.

Voici un résumé du cours d'Électromagnétisme II donné par Michele Maggiore en 2020 à l'Université de Genève

1 Équations de Maxwell

1.1 Équations sous forme vectorielle

Durant tout le cours les unités gaussiennes sont utilisées. Équations de Maxwell sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\, r && \textit{Gauss's Law} \\
&\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} && \textit{Ampere-Maxwell Law} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 && \\
&\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 && \textit{Faraday's Law}
\end{aligned} \tag{1}$$

où nous avons :
- — r la charge volumique, $[r] = [M]^{1/2}\,[L]^{-3/2}\,[T]^{-1} = [esu]\,[L]^{-3}$;
- — $\mathbf{j}$ la densité volumique de courant électrique, $[j] = [r]\,[L]\,[T]^{-1} = [esu]\,[L]^{-2}\,[T]^{-1}$
- — $\mathbf{E}$ le champ électrique, $[E] = [r]\,[L] = [statV]\,[L]^{-1}$
- — $\mathbf{B}$ le champ magnétique, $[B] = [r]\,[L] = [G]$

La trajectoire que subit une particule de charge q ($[q] = [esu]$) et de vitesse $\mathbf{v}$ en présence d'un champ électromagnétique est déterminée par la force de Lorentz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{p} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{2}$$

où $\mathbf{p}$ est la quantité de mouvement de la particule. Avec la notation d'Einstein, ces équations deviennent:

$$\begin{aligned}
&\partial_i\, E_i = 4\pi\, r && \textit{Gauss's Law} \\
&\epsilon_{ijk}\,\partial_j\, B_k - \partial_t\, E_i/c = 4\pi\, j_i/c && \textit{Ampere-Maxwell Law} \\
&\partial_i\, B_i = 0 && \\
&\epsilon_{ijk}\,\partial_j\, E_k + \partial_t\, B_i/c = 0 && \textit{Faraday's Law} \\
&\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t = q\,(E_i + \epsilon_{ijk}\, v_j\, B_k/c) && \textit{Lorentz's force}
\end{aligned}$$

1.2 Conservation de la charge

À partir des équations de Maxwell nous trouvons:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{3}$$

Si nous considérons un certain volume V, la charge électrique Q_V à l'intérieur de se volume est définie par:

$$Q_V = \int_V r(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

le courant électrique étant le débit de charge électrique à travers une surface données, on définie le flux électrique à travers une surface S de la manière suivante:

$$\text{flux} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

En intégrant l'équation (3) dans le volume V et utilisant le théorème de Gauss, on trouve:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_V = -\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

L'équation (3) (équation de continuité) implique donc la conservation de la charge électrique.

1.3 Énergie du champ électromagnétique

À partir des équations de Maxwell nous trouvons également:

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{4}$$

Pour un système composé d'une particule de charge q, nous avons $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = q\, \mathbf{E} \cdot v = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} = \dot{\varepsilon}_{\text{cin}}$, où ε_{cin} est l'énergie cinétique de la particule. L'autre terme à gauche correspond donc également à une variation d'énergie électromagnétique au cours du temps et le terme à droite à une densité de flux d'énergie. En effet, en définissant:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad \textit{Poynting Vector} \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\, \mathrm{d}^3 x \qquad \textit{Electromagnetic field energy} \tag{6}$$

Nous trouvons en intégrant l'équation (4) sur un volume V la relation suivante:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\varepsilon_{\text{em}} + \varepsilon_{\text{cin}}) = \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{7}$$

1.4 Potentiels de Jauge

Comme $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, par le théorème *divergence-free* il existe $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ tel que:

$$\boxed{\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}} \tag{8}$$

Nous avons alors par la loi de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

et donc par le théorème *curl-free* il existe $\phi(t, \mathbf{x})$ tel que:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \tag{9}$$

Comme $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ et la loi de Faraday sont satisfaites par les définitions de $\mathbf{A}$ et ϕ, les équations de Maxwell deviennent:

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = -4\pi\, r$$
$$\Box\, \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}$$

où

$$\Box\ = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Nous pouvons constater que les équations (8) et (9) sont invariantes par la transformation suivante, qu'on nomme *Transformation de Jauge*:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\theta$$
$$\phi \to \phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

où $\theta(t, \mathbf{x})$ est une fonction (bien définie) quelconque. Nous pouvons alors simplifier les équations de Maxwell par les deux manières suivantes:

Jauge de Lorenz Nous choisissons un $\theta(t, \mathbf{x})$ de sorte que

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0} \tag{10}$$

et les équations de Maxwell deviennent:

$$\boxed{\Box\, \phi = -4\pi\, r \quad \cdot \quad \Box\, \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}} \tag{11}$$

Jauge de Coulomb Nous choisissons un $\theta(t, \mathbf{x})$ de sorte que

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0} \tag{12}$$

et les équations de Maxwell deviennent:

$$\boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\, r \quad \cdot \quad \Box\, \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{\nabla}\,\frac{\partial \phi}{\partial t}} \tag{13}$$

2 Relativité Restreinte

2.1 Les postulats

Un référentiel inertiel est un référentiel dans le quel tout corps qui ne subit aucune force externe su déplace avec une vitesse **v** constante. À partir de cette notion de référentiel inertiel, la relativité restreinte d'Einstein se construit à partir des deux postulats suivants:

1. Principe de relativité: Les lois de la nature sont les mêmes pour tout référentiel inertiel.
2. La vitesse de la lumière (c) a la même valeur pour tout référentiel inertiel.

Soient deux événement dans un référentiel $x^\mu_A = (x^0_A, x^1_A, x^2_A, x^3_A)^T$ et x^μ_B dans un référentiel inertiel K représentés par des quadrivecteurs, où $x^0 = ct$. On définit l'intervalle s entre les deux événement de la manière suivante:

$$s^2 = -(x^0_A - x^0_B)^2 + (x^1_A - x^1_B)^2 + (x^2_A - x^2_B)^2 + (x^3_A - x^3_B)^2 \tag{14}$$

De manière équivalente, dans un référentiel K', on a $s'^2 = -(Dx'^0)^2 - (D\mathbf{x}')^2$. On peux montrer que les deux postulats de la relativité restreinte impliquent que $\boxed{s^2 = s'^2}$. Sans perte de généralité, pour tout évènement x^μ, on définie les *transformation de Lorentz*, les transformation qui laissent invariante la forme quadratique suivante:

$$s^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{15}$$

Ces transformation forment un groupe qu'on appelle *Groupe de Lorentz*. Deux référentiels inertiels peuvent toujours être liés par une transformation de Lorentz.

2.2 Les transformations de Lorentz

On désigne les transformations de Lorentz par le tenseur $\Lambda^\mu{}_\nu$ (ou $\Lambda_\mu{}^\nu$). De sorte que si x^μ est un événement dans un référentiel K, dans un référentiel K' on a:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{16}$$

où nous utilisons la principe de sommation d'Einstein. Et de manière équivalente pour un vecteur covariant et un tenseur:

$$\begin{gathered} x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu \\ T^\mu{}_\nu \to T'^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_{\mu'} \, \Lambda_\nu{}^{\nu'} \, T^{\mu'}{}_{\nu'} \end{gathered}$$

La métrique induite par les transformations de Lorentz doit être:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^{\mu'} \, \Lambda_\nu{}^{\nu'} \, \delta_{\mu'\nu'} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{17}$$

où $\delta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$ est la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^4$, puisque la norme d'un quidrivecteur est $s^2 = x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} \, x^\nu x^\mu = -(x^0)^2 + \mathbf{x}^2$. Ceci est valide pour toute transformation de Lorentz et donc $\eta_{\mu\nu}$ est un invariant de Lorentz. On peut alors trouver des conditions pour $\Lambda^\mu{}_\nu$:

$$
\begin{aligned}
\eta_{\sigma\rho}\, x'^{\sigma} x'^{\rho} &= \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} x^{\nu} \\
\eta_{\sigma\rho}\, (\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\, x^{\mu})(\Lambda^{\rho}{}_{\nu}\, x^{\nu}) &= \eta_{\mu\nu}\, x^{\mu} x^{\nu} \\
\implies \Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} &= \eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Sous forme matricielle on a donc la condition $\boxed{\Lambda^T\, \eta\, \Lambda = \eta}$. Cette relation implique, en prenant le déterminant des deux côtés, que $\det(\Lambda) = \pm 1$. Cependant, les transformations avec un déterminant de -1 sont des transformations de parité (changement du signe d'un axe p. ex.) et ne seront pas considérés. On dénote le groupe des transformations qui conservent la forme quadratique (15) par $O(3,1)$ et le sous groupe dont le déterminant est $+1$ par $SO(3,1)$. De manière formelle, le groupe dit "propre" de Lorentz est $SO(3,1)$.

On peux montrer que les transformations formant le groupe de lorentz sont les rotations spatiales autours de chaque axe et les *boost* en direction de chaque axe spatial.

2.2.1 Les rotations

Les rotations $\Lambda \in SO(3,1)$ sont une cas spéciale de transformations qui se concernent que avec les axes spatiales d'un référentiel K (c'est-à-dire, $(x')^0 = x^0$). Généralement, une rotation de θ entre les axes x^1, x^2 s'écrit comme

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \tag{18}
$$

Où R est une matrice de rotation. Notamment, il existe 3 matrices de rotations indépendantes qui laissent (14) invariant.

2.2.2 Les boost

Les boost $\Lambda \in SO(3,1)$ font la partie remnante des applications en mélangeant l'axe temporelle x^0 avec une axe spatiale donnée (p. ex. on a choisi x^1, mais x^2, x^3 fonctionne dans le même sens) par une rotation hyperbolique, c'est-à-dire:

$$
\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & \sinh(\eta) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta) & \cosh(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

pour $-\infty < \eta < \infty$ où on définie η par $v_0 = c\tanh(\eta)$. A partir de $\cosh^2(\eta) - \sinh^2(\eta) = 1$, on dérive la transformation plus connu:

$$
\begin{aligned}
x^0 \to (x')^0 &= \gamma(v_0)\left(x^0 + \frac{v_0}{c} x^1\right) \\
x^1 \to (x')^1 &= \gamma(v_0)\left(x^1 + \frac{v_0}{c} x^0\right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

où $\gamma(v_0) = 1/\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$. Quelques remarques: * Sur Wikipedia, on a la même transformation mais avec $v_0 \to -v_0$. Je ne sais pas pourqoui, mais en principe, la métrique sera toujours conservé donc notre dérivation ne change pas si on mets $\eta \to -\eta$. * En prenant la limite $c \to \infty$, la transformation se simplifie à la rélativité Galiléen. * Cette transformation nous laisse déterminer la transformation de vitesse, c'est-à-dire:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_0 v_x}{c^2}}, v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 + \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}, v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 + \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

Les vitesses v_y, v_z changent aussi car on transforme le temps aussi que l'axe x^1.

2.2.3 Causalité

[A FAIRE]

2.2.4 Dilation du temps

[DRAFT; pas trop sûr si strictement correct et pas trop condensé pour l'instant/techniquement pas nécessaire de faire avec une référentiel K' inertiel] Soit un référentiel inertiel K et soit un autre référentiel K' qui bouge avec une vitesse $\mathbf{v_0}$ par rapport au premier (par exemple, soit une particule de vitesse $\mathbf{v_0}$ et laissons comparer son référentiel avec un immobile). Soit une durée de temps $\Delta t'$ dans K' (l'horloge de particule laisse passer une heure disons). Quel est la rélation entre $\Delta t'$ et le temps correspondant Δt dans le référentiel K?

L'intervalle dans K' est $s'^2 = -c^2 \Delta t'^2$. Dans K, on a $s^2 = (-c^2 + v_0^2)\Delta t^2$. La métrique est conservé entre des référentiels inertiels, donc

$$-c^2 \Delta t'^2 = (-c^2 + v_0^2)\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}\Delta t$$

On nomme généralement $\Delta t'$ le *temps propre et le dénote par $\Delta\tau$. Une propriété bien utilisé est le fait que le temps propre est Lorentz covariant, et donc peut être utilisé pour constuire des vecteurs x^μ Lorentz covariants .*

2.2.5 Contraction de longueurs

Dans une façon très similaire, on voit une contraction d'objets (ou plutôt d'espace) en mouvement relative à un référentiel inertiel. Pour montrer considérons deux observeurs: une dans une référentiel K immobile et une autre K' qui travers l'espace selon la direction x avec une vitesse v_0 par rapport à K (ici, on suppose le cas 2 dimensionelle d'espace-temps, mais l'argument est analogue pour les espaces supérieures).

[INCLUDE DIAGRAM]

Considérons la measurement d'une longueur l marqué par l'origine de K (0, 0) et un événement B (0, l). On veut considérer l'événement où l'origine de K' passe le ligne $x = l$ dans K'. On suppose que, au $t = 0$, les origines de K et K' sont alignés. Pour K, cela correspond à

$$s^2 = -c^2 t^2 + l^2 = -c^2 \frac{l^2}{v^2} + l^2$$

Pour K', le bout du longueur s'approche à une vitesse $-v_0$. Alors, l'intervalle l'intervalle entre les deux événements (quand les deux origines sont alignés et quand l'origine a passé le bout du longueur) est

$$s'^2 = -c^2 t'^2 = -c^2 \frac{l'^2}{v^2}$$

Comme la métrique est conservé, on trouve $l'^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) l^2 = \frac{1}{\gamma(v_0)^2} l^2$, ce qui donne

$$l = \gamma(v_0) l' \tag{20}$$

En autre mots, la longueur propre (le référentiel au l'objet est au repos) est la longueur la plus longue possible par rapport aux référentiels inertiels. Comme le temps propre, la longueur propre est Lorentz covariante.

2.3 Les mathématiques des groupes de Lorentz

Notre prochaine but sera de constuire une cadre de physique qui laisse invariant la métrique.

Commençerons avec quelques définitions. Un ***quadrivecteur*** *est un vecteur V de quatre composantes (V^0, V^1, V^2, V^3) qui laisse invariante la quantité*

$$\eta_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2$$

Puisquie l'intervalle ds^2 entre deux évenements x_A et x_B est toujours Lorentz covariants, on peut directement constuire un quadrivecteur en mettant $x_A = (0,0,0,0)$ et $x_B = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Ensuite, clarifions quelques terms souvents mentionnés: - Un quadrivecteur ***contravariant*** *est un quadrivecteur avec l'indice en haut comme définit ci-dessus. - Un quadrivecteur* ***covariant*** *est un quadrivecteur avec l'indice en bas, qu'on peut définir comme $V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu$ où $V_0 = -V^0$ et $V_i = V^i, i = 1,2,3$. - Une quantité est* ***Lorentz covariant*** *si elle est indépendant de référentiel inertiel (p. ex. le temps propre, la longueur propre ou les quadrivecteurs)*

[Peut-être il faut noter la liaison entre les vecteurs covariants/contravariants et les bras/kets; juste comme les bras et kets, un vecteur covariant est la forme linéaire correspondant au vecteur contravariant. En rélativé restreint, on se concerne beaucoup plus avec le produit scalaire entre ces deux quantités et pas avec l'ordre comme dans la méca quantique.]

3 Electrodynamique dans la notation rélativiste

4 Ondes électromagnétiques dans le vide

4.1 L'effet Doppler et l'abberation de la lumière

L'effet Doppler est la différence de fréquence d'un rayon de lumière (ou d'un effet propagant répétitive quelconque, comme le son) qu'on voit en faisant un changement de référentiel (en particulier, il existe l'effet de Doppler Galiléen qui est discuté dans la dernière partie de la chapitre 5 des notes de cours). Laissons le discuter dans la partie suivante:

Soient un référentiel K_S et une source S de rayonnement telle que S est au repos dans K_S. Soient $\hat{n_S}$ le vecteur de l'origine à la source S dans K_S. Soient un référentiel K_{obs} de l'observer telle que K_S bouge avec une vitesse $-\mathbf{v_0}$ dans K_{obs}. On dénote également $\hat{n_{obs}}$ qui va de l'observer vers la source. Alors, le boost s'écrit comme (ici, on choisit $\beta = -\mathbf{v_0}/c$)

$$\begin{aligned} x^0_{obs} &= \gamma\left(x^0_S + \beta \cdot \mathbf{x_S}\right) \\ x^\parallel_{obs} &= \gamma\left(x^\parallel_S + \beta x^0_S\right) \\ \mathbf{x^\perp_{obs}} &= \mathbf{x^\perp_S} \end{aligned}$$

Pour des raisons qu'on va voir, on aimerait plutôt utiliser la transformation invers. Soit un signal de lumière qui va de la source représenté par le quadrivecteur $k^\mu_S = \frac{\omega_S}{c}(1, -\hat{n}_S)$ dans K_S et $k^\mu_{obs} = \frac{\omega_{obs}}{c}(1, -\hat{n}_{obs})$ dans K_{obs}. On peut substituer ces deux dernières dans une boost inversé pour trouver après quelques manipulations

$$\boxed{\omega_{obs} = \frac{\omega_S}{\gamma(1+\beta_{\mathbf{S}}\cdot\hat{n}_{obs})}}$$

5 Champs électromagnétiques de charges en mouvement

Dans ce chapitre, on aimerait résoudre les équations de Maxwell. Pour ça, on utilise la fonction de Green et l'expression des équations de Maxwell sous notation rélativiste (avec le jauge de Lorenz), c'est-à-dire

$$\Box A^\mu = -4\pi j^\mu$$

(21)

Où A^μ et j^μ sont les "four-potentiel" et "four-current". Pour résoudre ça, on introduit la fonction de Green $G(x;x')$ telle que

$$\Box_x G(x;x') = \delta^{(4)}(x-x') \tag{22}$$

où x et x' sont des quadrivecteurs, mais x' est qu'une constant. Comme x' est constante, $G(x;x'$ dépend que sur la différence de $x-x'$. Telle que la solution générale sera donner par

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x;x')j^\mu(x') \tag{23}$$

En considérant $x'=0$ sans perte de généralité, il nous faut résoudre

$$\Box G(x) = \delta^{(4)}(x) \tag{24}$$

où, pour être explicite, on a $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}+\nabla_x^2$. On enleve la dérivée temporelle en faisant un transformation Fourier:

$$\Box G(x) = \Box\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0x^0}\tilde{G}(k_0,\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0x^0}(k_0^2+\nabla_x^2)\tilde{G}(k_0,\mathbf{x}) \tag{25}$$

Sur la côté droite, on remarque qu'on peut $\delta(x^0) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0x^0}$. En faisant une transformation de Fourier inverse, on trouve

$$(k_0^2+\nabla^2)\tilde{G}(k_0,\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x})$$

où l'opérateur $k_0^2+\nabla^2$ s'appelle l'opérateur de Helmholtz. L'éequation ci-dessus est invariant sous rotation autour de l'origine. Alors, la solution peuvent se simplifier sur la forme (dans la partie suivante, on a supprimer le k_0 pour des raisons de notations; il reste toujours là!)

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{-4\pi r}f(r) \tag{26}$$

où $f(r)$ est une fonction à déterminer et on extraire la $1/(-4\pi r)$ parce qu'il donne des critères plus belles sur la fonction $f(r)$. En utilisant le Laplacian pour les coordonnées sphériques et $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, on a (d'abord (24), puis (23))

$$(k_0^2 + \nabla^2)\tilde{G}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi r}(k_0^2 f(r) + f''(r)) + f(r)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) := \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

Comme $f(r)\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = f(0)\delta^{(3)}(\mathbf{x})$, f devait satisfaire $f(0) = 1$ et

$$k_0^2 f(r) + f''(r) = 0$$

f a donc deux solutions indépendantes: $f^{\pm}(r) = e^{\pm ik_0 r}$. Les solutions indépendantes correspondantes $G^{\pm}(x)$ sont la transformation de Fourier des $G^{\pm}(k_0, \mathbf{x})$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} G^{\pm}(x) &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 x^0} \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} e^{\pm ik_0|\mathbf{x}|}\right) \\ &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(x^0 \mp |\mathbf{x}|)} \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\delta(x^0 \mp |\mathbf{x}|) \end{aligned} \tag{27}$$

On peut introduire le x' en remarquant que G dépend que sur la différence $x - x'$

$$\boxed{G^{\pm}(x, x') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(x^0 - x'^0 \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)} \tag{28}$$

On peut donc écrire les solutions inhomogènes indépendantes de A^μ comme:

$$\begin{aligned} [A^\mu(t, \mathbf{x})]^{\pm} &= \int d^3x' dt' \frac{j^\mu(t', x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t - t' \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c) \\ &= \int d^3x' dt' \frac{j^\mu(t', x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta(t' - (t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)) \\ &= \int d^3x' \frac{j^\mu(t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned}$$

Pour la solution de $+$, le potentiel A^μ dépend sur j^μ pour les temps $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, c'est-à-dire pour le cône de lumière passée (pour ça, cette solution s'appelle le "retarded Green solution"). Cette solution correspond bien avec notre intuition de causalité, où le potentiel se produit de courant de passé et de la présent (pas du futur!). Pour la solution de $-$, par contre, A^μ dépend sur j^μ pour les temps $t + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, c'est-à-dire le cône de lumière du futur ce qui n'est pas physique, donc on va que considérer la solution $+$.