

Università degli studi di Trento

Anno accademico 2014-2015



Calcolo delle curve di possibilità pluviometrica con R

Docente:

Riccardo Rigon

Studenti:

Michele Lorenzon 158286

Matteo Zambra 159014

Indice generale

1	Introduzione.....	3
1.1	Raccolta dati.....	3
2	Procedimento teorico.....	9
2.1	Metodo dei momenti.....	9
2.2	Metodo dei minimi quadrati.....	10
2.3	Metodo della massima verosomiglianza.....	10
2.4	Test di Pearson.....	10
2.5	Calcolo dei tempi di ritorno e tracciamento delle linee segnalatrici di possibilità pluviometrica.....	11
3	Risultati.....	12
3.1	Curve di Gumbel.....	12
3.2	Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica.....	16

1 Introduzione

Lo scopo di questa relazione è illustrare il procedimento seguito per ottenere le curve di possibilità pluviometrica della zona di S. Martino di Castrozza.

I dati impiegati sono della omonima stazione meteorologica. Tale stazione è stata scelta in quanto ragionevolmente vicina al bacino idrografico oggetto di nostra analisi nella relazione apposita e ben fornita di dati. Vi erano presenti altre stazioni nelle vicinanze, ma i dati lì raccolti sono assai sguarniti delle informazioni necessarie per un'analisi sufficientemente accurata.

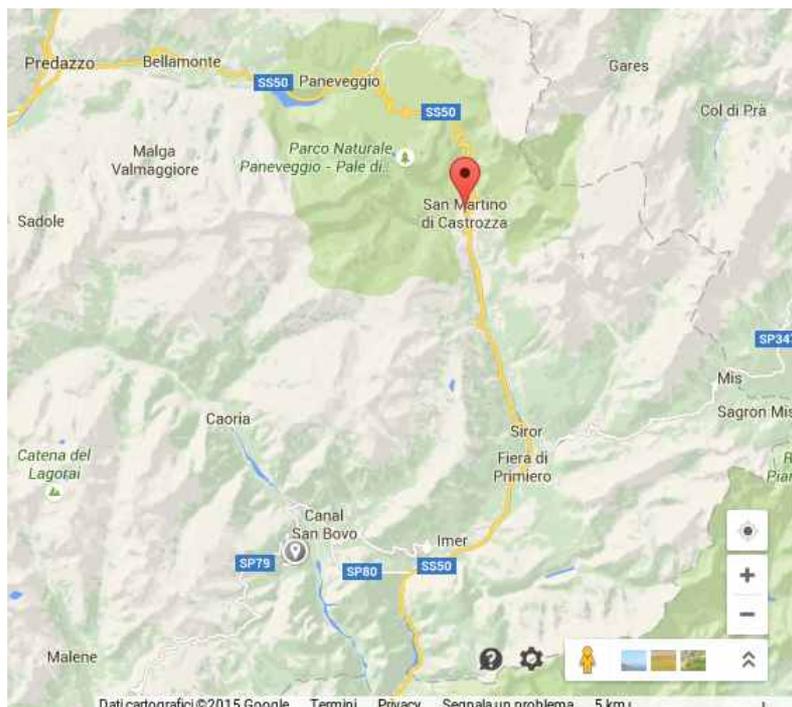


Fig. 1: Il puntatore rosso indica la zona dove si trova la stazione. Il piccolo puntatore grigio è la zona dove si trova il bacino analizzato nell'altra relazione

1.1 Raccolta dati

I dati sono stati raccolti in data 23 Aprile 2015 dal sito www.meteotrentino.it nella sezione apposita. Essi sono i dati registrati dalla stazione fra il 1932 e il 2003 (con delle interruzioni tra il 1945 e il 1953).

Innanzitutto si è proceduto a "ripulire" i dati, ovvero a selezionare i dati di nostro interesse e a ordinarli in uno spreadsheet a parte, sostituendo le caselle vuote con "NA" per non lasciare campi vuoti. Subito dopo si è esportato lo spreadsheet in formato .csv leggibile dal programma impiegato.

I dati sono ordinati in colonne e sono relativi a osservazioni rispettivamente di 1 ora, 3 ore, 6 ore, 12 ore e 24 ore.

Anno	1h	3h	6h	12h	24h
1932	18	25.6	30.6	59.8	97.4
1933	16.4	30	44.4	70.4	81.8
1934	25.2	40	45.2	49.6	75.6
1935	21	29.4	43.2	66	110.2
1936	19	31.2	35	42.4	61.2
1937	16.4	27	42.2	67	102
1938	17	26.2	43.4	66.8	99.8
1939	31	37.8	50	69.5	84.2
1940	37	61	66.2	78	105.4
1941	18.2	30	40	55.4	101
1942	26.4	27.6	42.6	63	91
1943	18.4	32.4	32.8	43.6	61
1944	26.2	29.6	30.2	44.6	63
1945	NA	NA	NA	NA	NA
1946	19.4	23.4	36	56.2	71.8
1947	NA	NA	NA	NA	NA
1948	NA	NA	NA	NA	NA
1949	NA	NA	NA	NA	NA
1950	NA	NA	NA	NA	NA
1951	NA	NA	NA	NA	NA
1952	25.8	26	40.2	75.6	88
1953	NA	NA	NA	NA	NA
1954	18.6	44.2	53.4	53.4	91
1955	18	26.6	32.4	36.8	45.8
1956	16.8	34.6	62.2	85.8	105.2
1957	23.8	32	50.2	72.6	82.6
1958	12.6	25.2	30.4	53.6	84.8
1959	14.8	35.2	55.2	NA	148.8
1960	17	27	39	57.6	91.2
1961	12.2	22.4	44.8	80	86.8
1962	14.8	27.6	35.6	58.2	75.8
1963	17.2	28.6	41	63.4	73.6
1964	15.4	24.4	33.8	66.6	95.4
1965	18	33	45	71.8	107.4
1966	20.6	49	89.8	157.8	224.6
1967	19	24.8	29.8	41.6	65.6
1968	15.2	32.6	47.8	75.4	110.2
1969	11.6	15.8	28.2	43.6	73.8
1970	18.2	44	58.6	67	71.4
1971	10.8	18.2	32.2	57.6	96.4
1972	15.4	24.4	29.8	45.8	78.4
1973	31	36.4	41.2	51.6	64.4
1974	NA	NA	NA	NA	NA
1975	16.6	26	41	66.2	68.8
1976	13.2	26.4	40.4	61	90.4
1977	16.2	25.2	30	49.4	66
1978	27	31.4	40.4	67.4	103.8
1979	18.2	31.2	39.4	69	110.8
1980	20.8	34.4	62.6	93	137.2
1981	19.6	36.6	51.8	76.6	136
1982	13.4	25.8	34	49.2	65.2
1983	17.4	42.6	53.8	75.2	75.2
1984	20.6	39.2	53.2	65.2	87
1985	18.8	26.6	52.6	59.8	86.4

1986	13	29	37.8	48.6	88.6
1987	20	36.6	59.6	90.4	125.2
1988	19.8	28.8	42.8	71.4	94
1989	14.8	30	47.6	69	99.8
1990	28.2	38.8	42.6	80.4	122.2
1991	41.6	42	42	63.8	89
1992	20.2	34	56.8	106.4	132.8
1993	16.2	27.8	44	69.4	86.2
1994	27.6	51	59.6	74.4	92.2
1995	16	26.2	28	29.4	42.4
1996	19	24.2	42.8	69.4	100.6
1997	18.6	30.2	30.2	54	82.4
1998	29.4	42	54.8	55.6	72.4
1999	19.4	31	51.8	87.2	106
2000	32.2	48.2	52	74.6	136
2001	19	32.2	42.6	64.2	92.8
2002	21.4	36.4	43.8	69.2	110.8
2003	41.8	45	48	74.6	125.6

Fig. 2: Tabella contenenti i dati impiegati

Ordinando i dati per le singole durate in istogrammi con la frequenza in ordinate e l'altezza in ascissa, si può meglio analizzare l'entità delle precipitazioni e la frequenza con cui si hanno determinati valori.

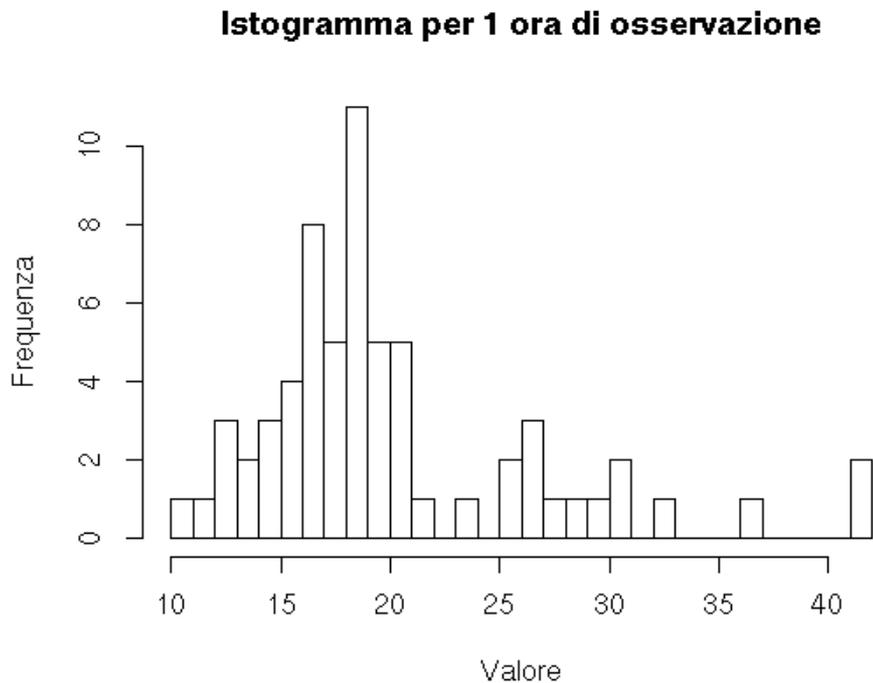


Fig. 3: Frequenza delle precipitazioni in 1 ora

Istogramma per 3 ore di osservazione

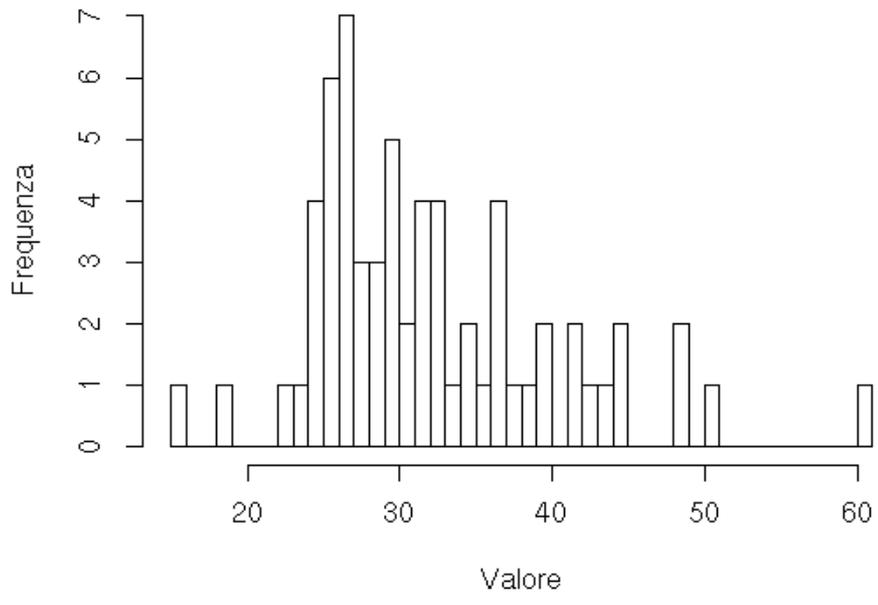


Fig. 4: Frequenza delle precipitazioni in 3 ore

Istogramma per 6 ore di osservazione

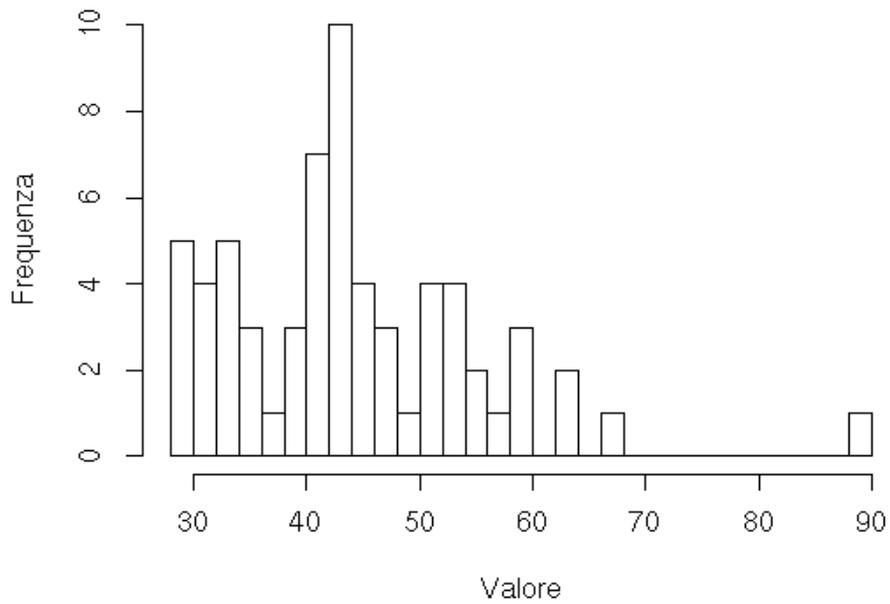


Fig. 5: Frequenza delle precipitazioni in 6 ore

Istogramma per 12 ore di osservazione

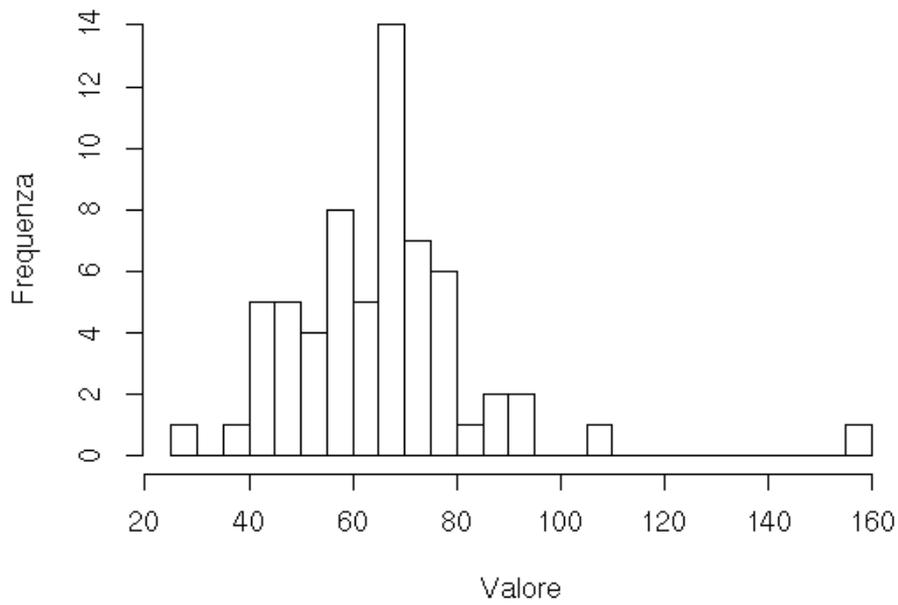


Fig. 6: Frequenza delle precipitazioni in 12 ore

Istogramma per 24 ore di osservazione

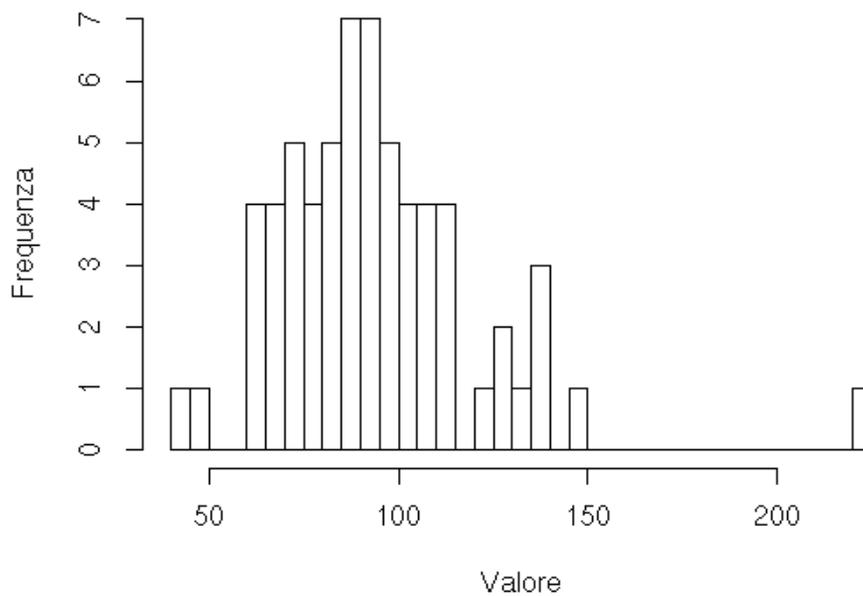


Fig. 7: Frequenza delle precipitazioni in 24 ore

Si può anche avere una visione d'insieme delle altezze in un grafico con l'altezza di precipitazione in ordinate e l'anno in ascisse, con più grafici a indicare le varie durate. L'assenza di dati in certe regioni è dovuta alla mancanza di dati in certi anni.

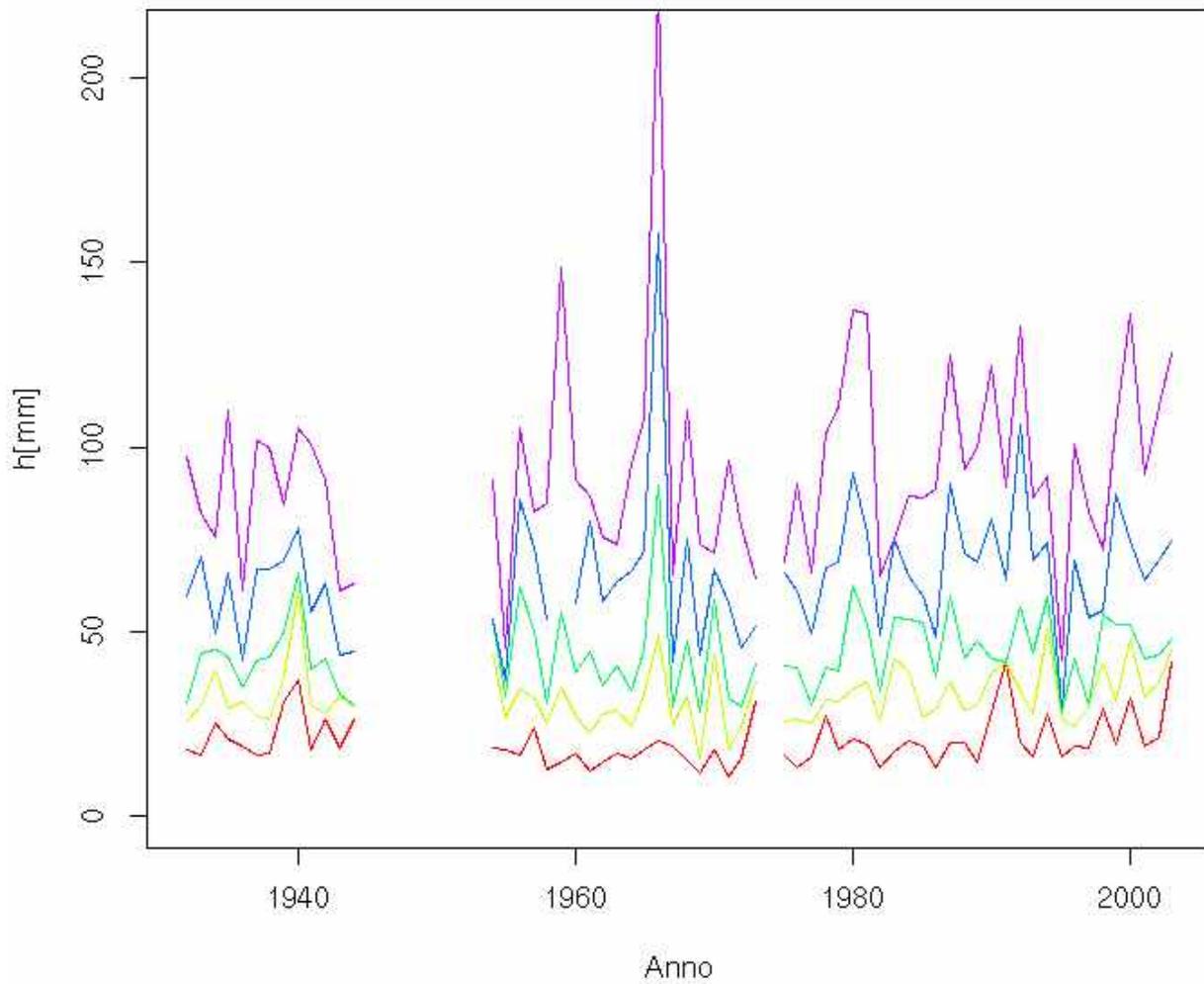


Fig. 8: Grafico rappresentante le altezze di precipitazione negli anni

2 Procedimento teorico

Il passo successivo alla raccolta dei dati è il calcolo delle curve di Gumbel che meglio approssimano le distribuzioni delle precipitazioni, per poter collegare a un tempo di monitoraggio un'altezza di precipitazione.

Una curva di Gumbel è una curva di equazione

$$P[H < h; a, b] = e^{-e^{-\frac{h-a}{b}}}$$

con a e b parametri della curva. Si procederà a individuare tali parametri con tre metodi:

- metodo dei momenti
- metodo della massima verosomiglianza
- metodo dei minimi quadrati

per poi individuare la coppia di parametri più affini alla distribuzione esaminata.

2.1 Metodo dei momenti

Il metodo dei momenti consiste nell'eguagliare i momenti del campione (ovvero i nostri dati di precipitazione) con i momenti della popolazione (descritta dalla curva di Gumbel). Servono tanti momenti quanti sono i parametri da stimare, dunque nel caso qui considerato si impiegheranno i momenti di primo e secondo ordine, ovvero la media e la varianza attesi dalla distribuzione.

$$M[1, \theta] = E_H[h] = \int_{-\infty}^{+\infty} h \cdot pdf(h, \theta) dh$$
$$M[2, \theta] = \int_{-\infty}^{+\infty} (h - E_H[h])^2 \cdot pdf(h, \theta) dh$$

con θ parametri della curva

Questi momenti verranno eguagliati alla media μ_h e alla varianza σ_h^2 del campione. Con $pdf(h, \theta)$ si intende la funzione di distribuzione di probabilità, in questo caso quella di Gumbel.

Applicando i momenti alla curva di Gumbel, si tratta di risolvere il sistema

$$\mu_h = b \gamma + a$$
$$\sigma_h^2 = \frac{b^2 \cdot \pi^2}{6}$$

con $\gamma = 0.577216$ costante di Eulero–Mascheroni

2.2 Metodo dei minimi quadrati

Il metodo dei minimi quadrati prevede di minimizzare la funzione scarto quadratico, che è la differenza tra la distribuzione cumulativa empirica e la distribuzione di Gumbel, in modo che la distribuzione scelta sia quanto più vicina possibile a quella di tipo Gumbel.

Si tratta poi di porre minima la somma degli scarti quadratici tra le due distribuzioni per ogni elemento:

$$\delta^2(a, b) = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{F_i}_{ECDF} - \underbrace{P[H < h_i; a, b]}_{\text{probabilità}} \right)^2$$

Il metodo verrà applicato interpolando una funzione il cui coefficiente angolare e intercetta sono funzioni di a e b :

$$Y_i = -\log(-\log(ECDF(F_i)))$$

2.3 Metodo della massima verosomiglianza

Il metodo della massima verosomiglianza consiste nel massimizzare la funzione che descrive la probabilità di ottenere le misure del campione, dati dei parametri. Usando come parametri a e b e supponendo le osservazioni indipendenti, si ha la funzione di verosomiglianza

$$P[\{h_1, \dots, h_N\} | a, b] = \prod_{i=1}^N P[h_i | a, b]$$

2.4 Test di Pearson

A questo punto si hanno tre curve di Gumbel possibili. Per individuare quella che meglio approssima la nostra distribuzione di precipitazioni si esegue il test di Pearson.

Esso consiste nel, per ciascuna curva:

1. suddividere l'intervallo delle probabilità in 5 parti (quantili uguali);
2. derivare una suddivisione del dominio;
3. contare il numero di elementi presenti in ogni intervallo;
4. calcolare il numero di elementi previsti in ogni intervallo dalla curva;
5. calcolare la funzione

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n(P[H < h_{i+1}] - P[H < h_i]))^2}{n(P[H < h_{i+1}] - P[H < h_i])} \equiv \sum \frac{(\text{Osservato} - \text{Atteso})^2}{\text{Atteso}}$$

Si scelgono quindi a e b della curva che presenta un X_i minore.

2.5 Calcolo dei tempi di ritorno e tracciamento delle linee segnalatrici di possibilità pluviometrica

Una volta trovate le curve e applicato il test di Pearson, si tratta di tracciare le curve di possibilità pluviometrica.

Il primo passo consiste nel determinare il quantile corrispondente al tempo di ritorno selezionato. Ciò si ottiene con la relazione

$$T_{rit} = \frac{1}{1 - P[H < h]}$$

Quindi

$$P[H < h] = 1 - \frac{1}{T_{rit}}$$

con cui si trovano i quantili in ordinata per tempi di ritorno scelti.

Tracciando poi la retta orizzontale corrispondente al quantile scelto, si tratta di individuare l'altezza di precipitazione all'intersezione con le curve. Plottando quei valori, si ottiene la linea segnalatrice di possibilità pluviometrica per il tempo di ritorno corrispondente al quantile impiegato.

Analiticamente, le curve di possibilità pluviometrica hanno equazione

$$h(t_p, T_{rit}) = a(T_{rit}) \cdot t_p^n$$

dove a è un parametro dipendente da T_{rit} e n un parametro indipendente da T_{rit} . Applicando il logaritmo si ha

$$\log[h(t_p, T_{rit})] = \log[a(T_{rit})] + n \log[t_p]$$

Questa è l'equazione di una retta, essendo il piano in scala bilogarithmica. Si nota che il coefficiente angolare delle rette è n , il parametro indipendente da T_{rit} . È per questo che le rette sono tra loro parallele: la loro inclinazione non dipende dal tempo di ritorno scelto, quindi a diversi T_{rit} la retta viene solo traslata.

3 Risultati

3.1 Curve di Gumbel

Si riportano ora le rappresentazioni grafiche delle curve di Gumbel individuate per le varie durate.

Nelle legende dei grafici si sono impiegate delle abbreviazioni: MM (Metodo dei Momenti), MQ (metodo dei Minimi Quadrati) e MV (metodo della Massima Verosomiglianza).

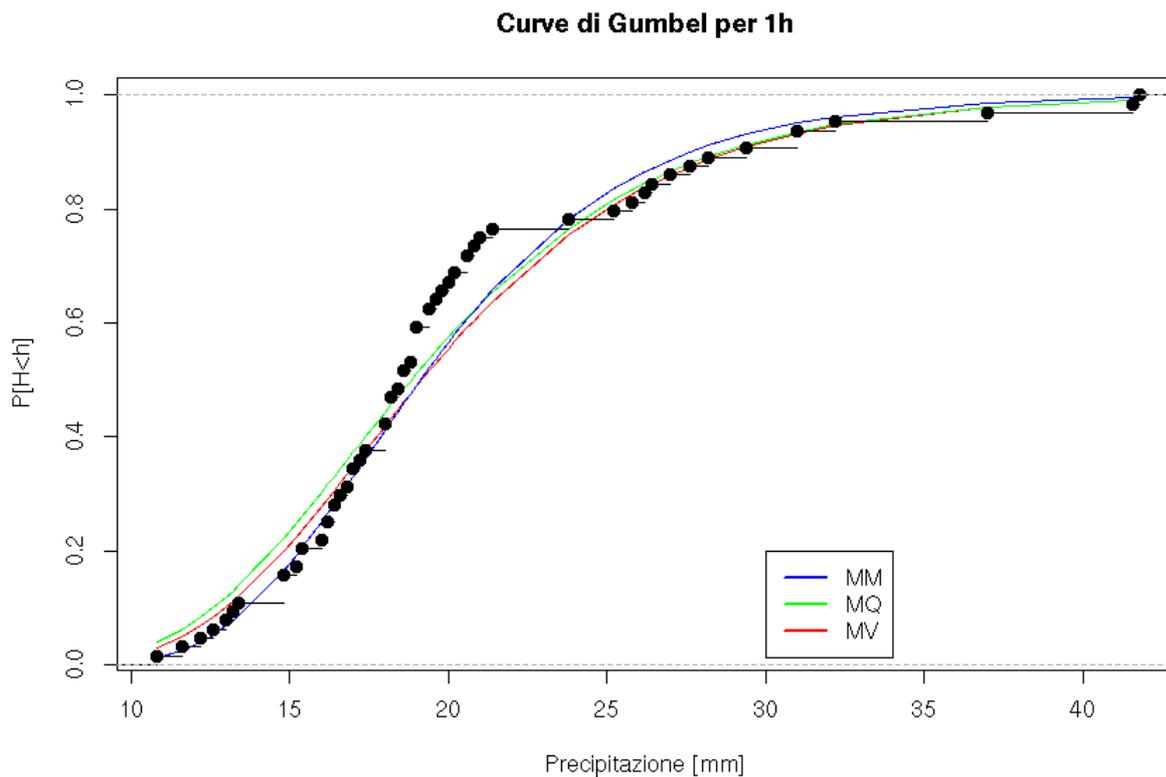


Fig. 9: Curve di Gumbel individuate per i valori di precipitazione di 1 ora

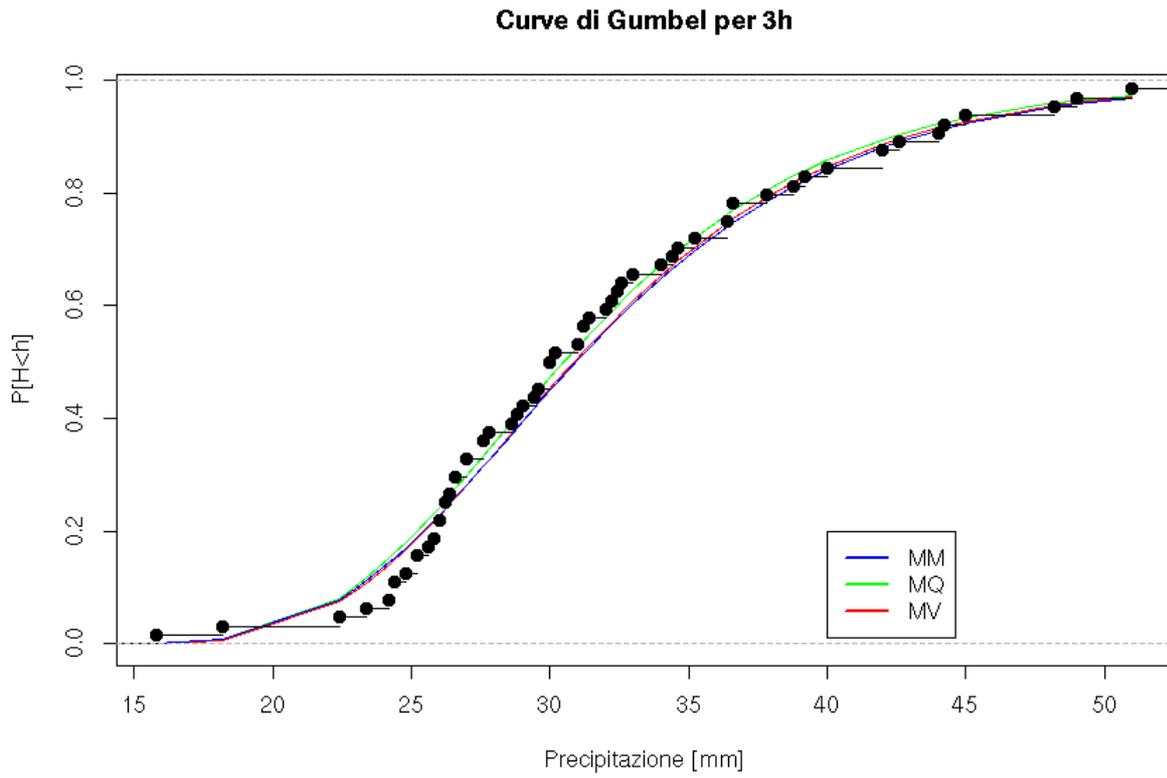


Fig. 10: Curve di Gumbel individuate per i valori di precipitazione di 3 ore

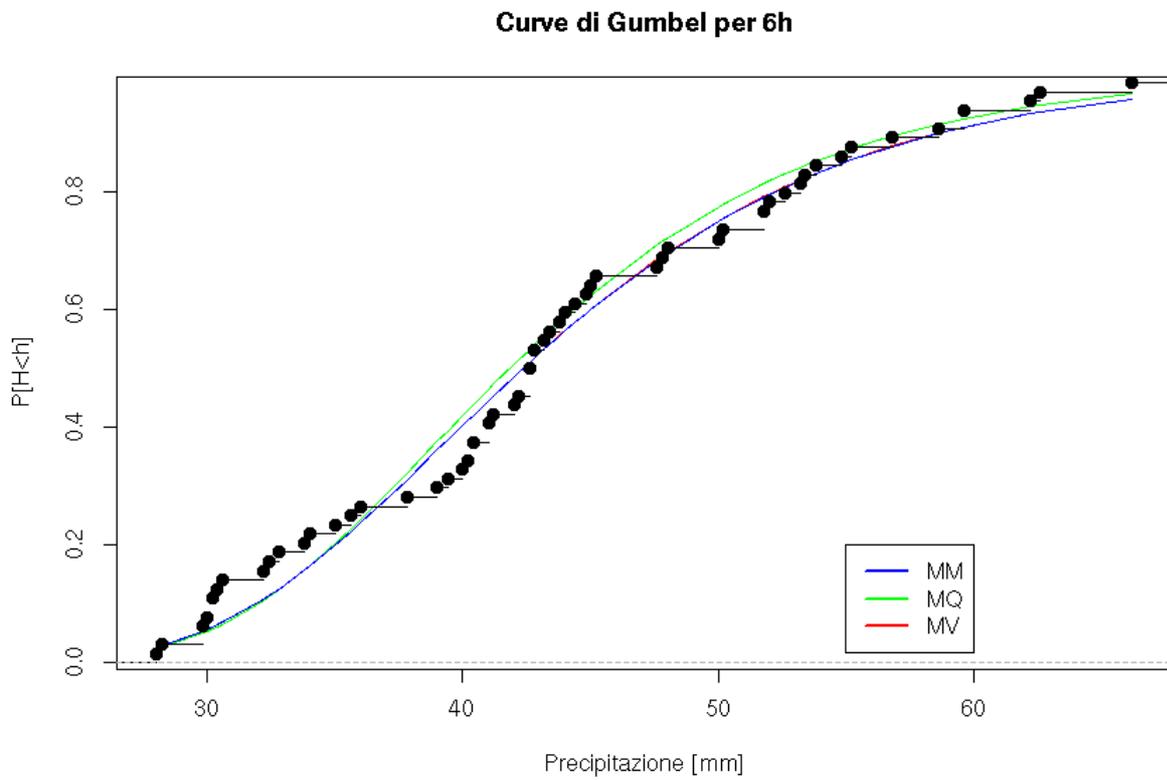


Fig. 11: Curve di Gumbel individuate per i valori di precipitazione di 6 ore

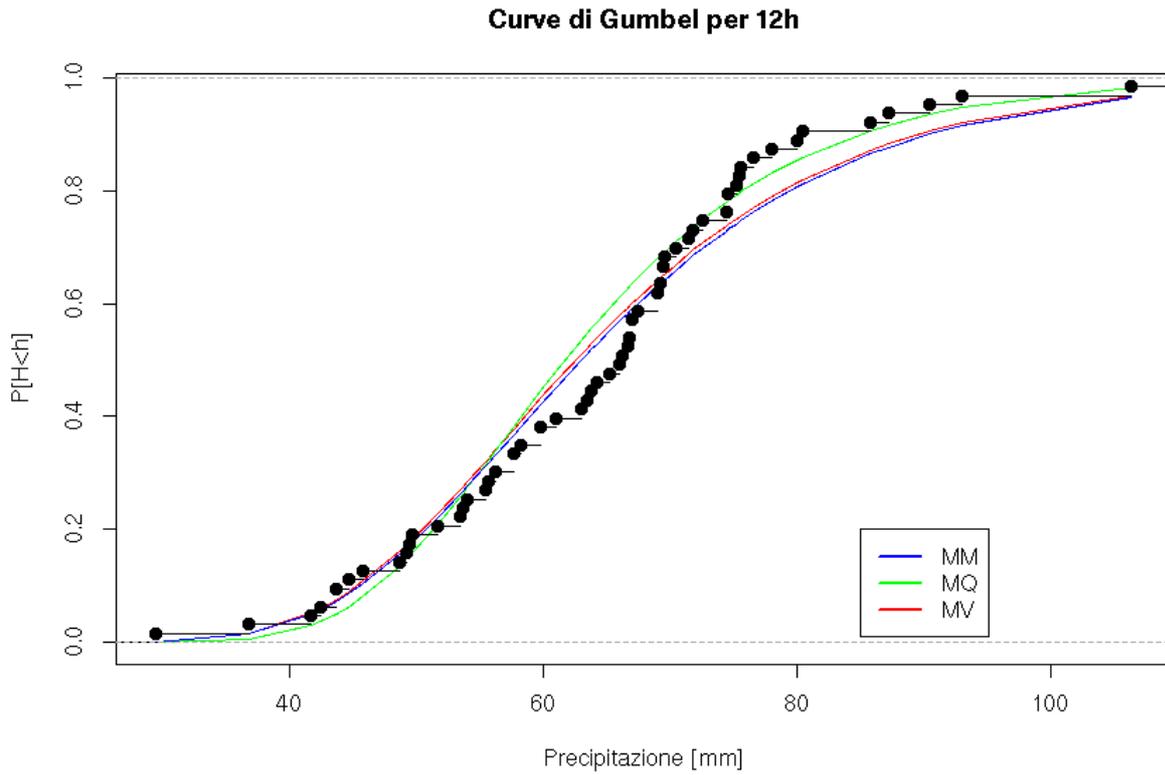


Fig. 12: Curve di Gumbel individuate per i valori di precipitazione di 12 ore

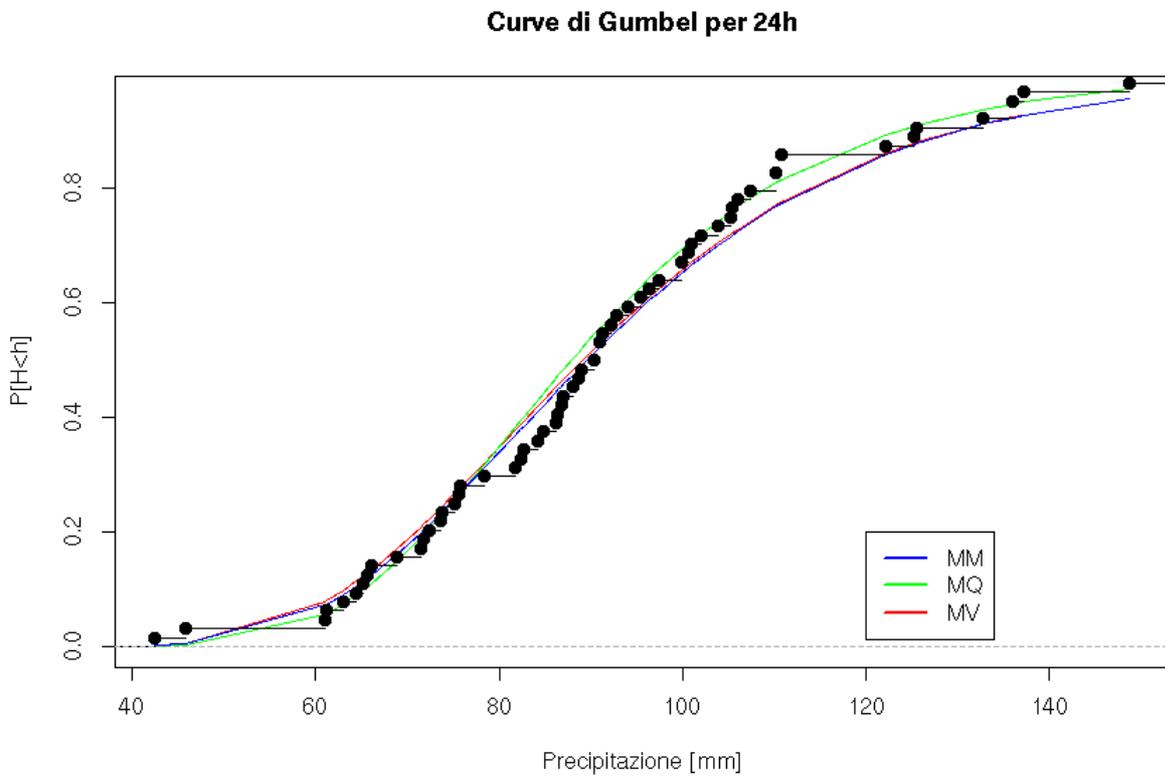


Fig. 13: Curve di Gumbel individuate per i valori di precipitazione di 24 ore

Questi sono i parametri a e b delle curve di Gumbel

Durata	Metodo	a	b	χ^2
1 ora	Momenti	17.280362	5.155588	13.5
	Massima v.	17.469291	4.514711	8.03125
	Minimi quad.	16.931842	5.199839	12.40625
3 ore	Momenti	28.524333	6.400406	2.71875
	Massima v.	28.540055	6.530100	2.71875
	Minimi quad.	28.199902	6.296690	2.09375
6 ore	Momenti	39.162371	8.716632	11.625
	Massima v.	39.166499	8.724005	11.625
	Minimi quad.	38.829019	8.218789	8.34375
12 ore	Momenti	57.265823	14.419326	7.873016
	Massima v.	57.649786	14.571434	5.015873
	Minimi quad.	57.179722	12.378091	11.365079
24 ore	Momenti	81.172928	21.583466	3.96875
	Massima v.	81.707861	21.400386	3.8125
	Minimi quad.	80.971331	18.805892	1.15625

Fig. 14: Tabella con i valori a e b individuati

Sono evidenziate le coppie che il test di Pearson ha segnalato come più adatte. Si riportano le curve selezionate.

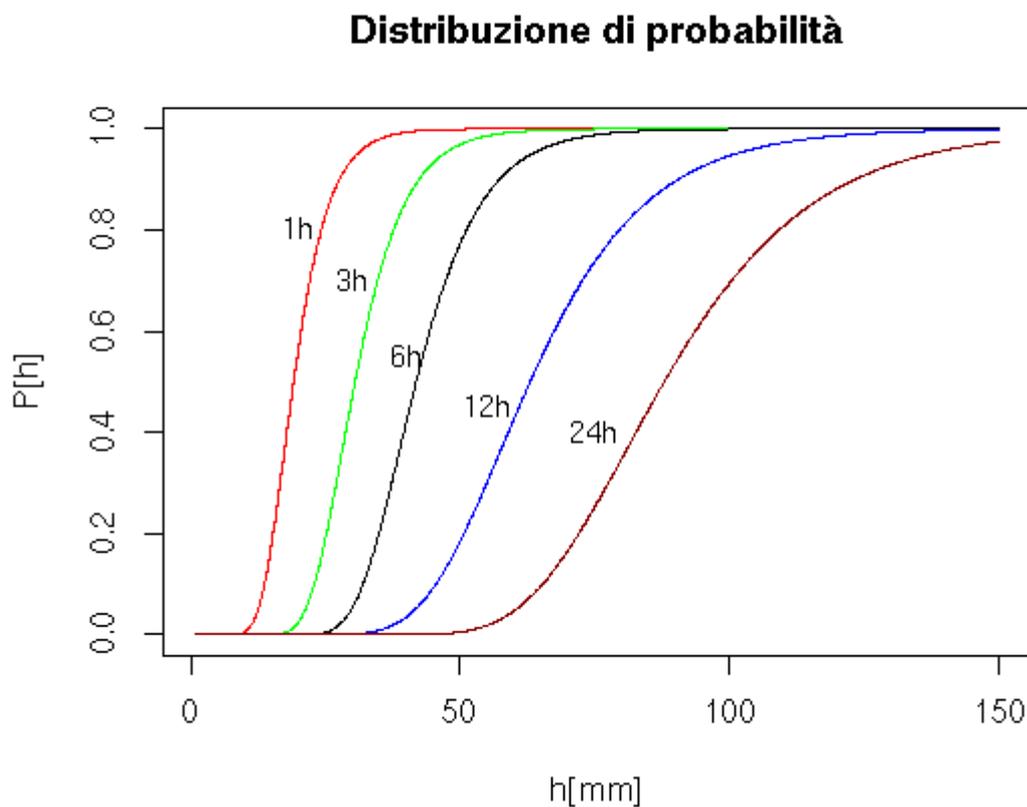


Fig. 15: Le migliori curve di Gumbel per i vari tempi

3.2 Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica

Si riportano i risultati per i tempi di ritorno considerati, ovvero 10, 20, 50, 100 e 200 anni. I risultati sono sia in piano normale che in piano bilogaritmico.

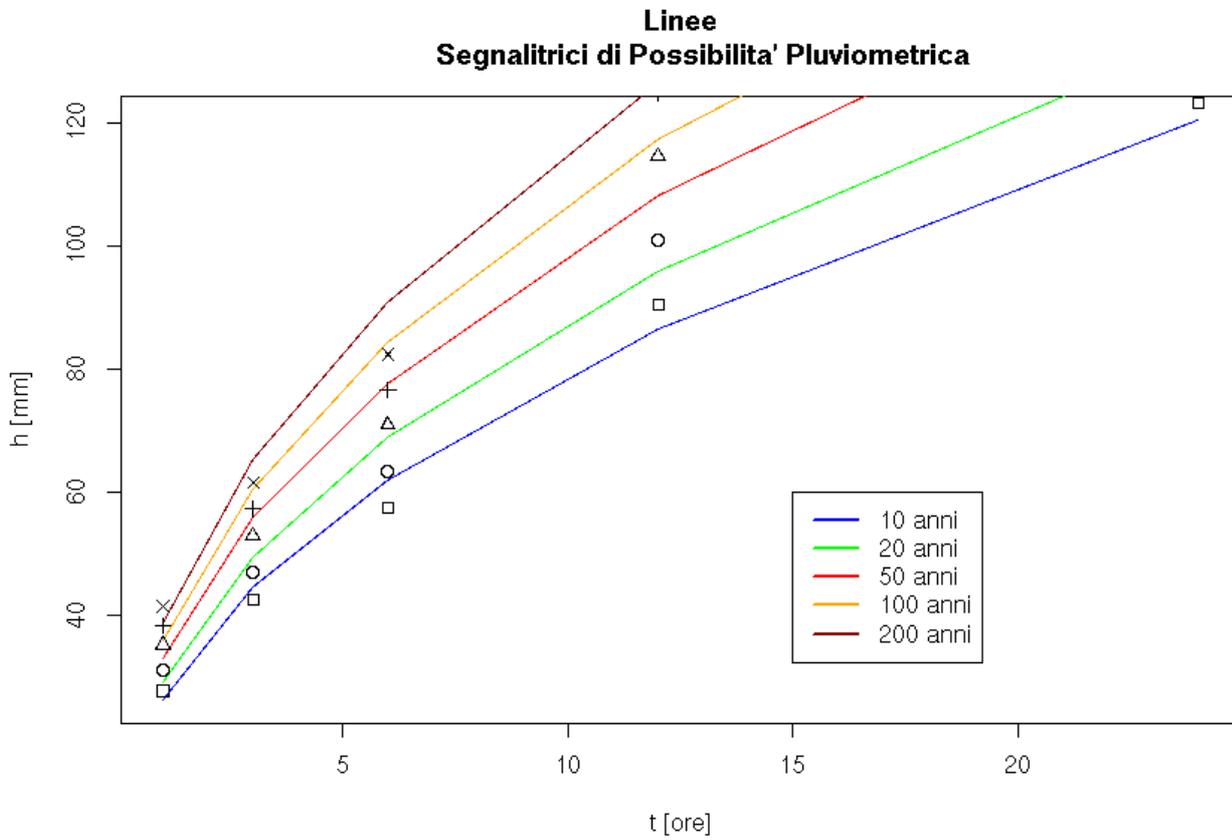


Fig. 16: Linee segnalatrici di possibilità pluviometrica in piano normale

Linee Segnatrici di Possibilita' Pluviometrica

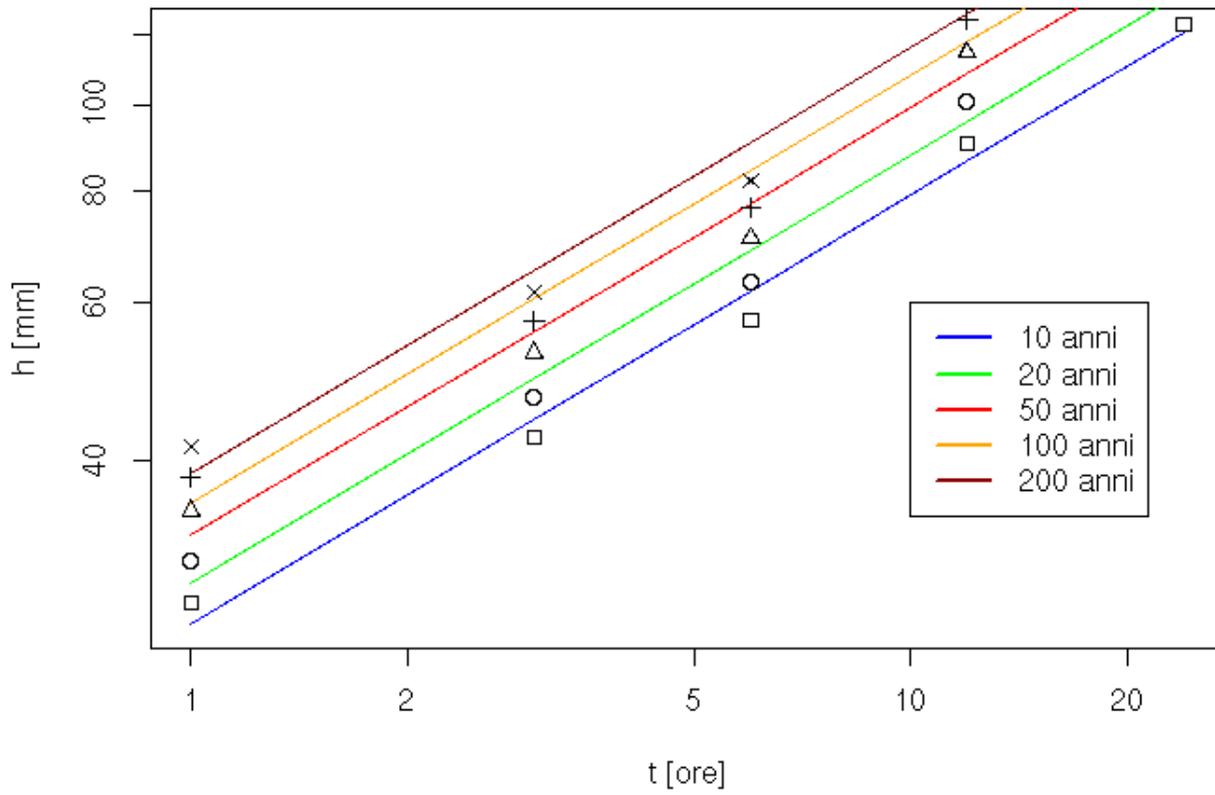


Fig. 17: Linee segnatrici di possibilità pluviometrica in piano bilogarithmico