

Teorema di Zermelo-Kuhn

Francesco Giorgino¹

¹Università degli studi di Pavia

March 10, 2019

Abstract

Il seguente elaborato presenta una serie di concetti chiave di teoria dei giochi per giungere poi alla formulazione più attuale del suddetto teorema con lo scopo di fornirne una dimostrazione semplice e intuitiva .

Introduzione

Il concetto di *gioco* è centrale in questa situazione, in teoria dei giochi questo viene rappresentato come l'insieme delle decisioni che portano i giocatori, detti *decisori*, ad un risultato, il *pay-off*. Inoltre si definisce *lunghezza di un gioco* il numero massimo di mosse che portano ad un esito finale.

É necessario ora introdurre due particolari classi di giochi:

I **giochi ad informazione completa** sono situazioni di contrattazione in cui si richiede che i decisori abbiano tutte le informazioni sul contesto e sulle possibili strategie dell'avversario, ma non sulle sue azioni.

I **giochi ad informazione perfetta** individuano situazioni analoghe alle precedenti con l'ulteriore richiesta che i giocatori conoscano in ogni istante tutte le mosse eseguite dall'avversario fin a quel momento. Osserviamo esplicitamente che questa richiesta impone al gioco di essere *sequenziale*, cioè composto da turni in cui ogni giocatore decide il "da farsi" sulla base delle precedenti mosse dell'avversario.

Un esempio di gioco ad informazione completa è il celebre *dilemma del prigioniero*, mentre gli scacchi e la dama sono esempi di giochi ad informazione perfetta.

Forma estesa e induzione a ritroso

La forma estesa è una rappresentazione del gioco, alternativa alla forma normale, in cui è possibile rappresentare un gioco sequenziale tramite un grafico ad albero.

L'albero è composto da *nodi decisionali*, si inizia a giocare da un unico nodo iniziale, e il gioco scorre attraverso l'albero lungo un percorso determinato dai giocatori fino a quando un nodo terminale viene raggiunto. Sotto ogni nodo si ramificano le possibili mosse che un giocatore può fare a punto del gioco e ai nodi terminali sono associati i payoff assegnati a tutti i giocatori.

Il gioco degli scacchi può essere scritto in forma estesa, all'apertura del bianco corrispondono le 20 possibili mosse che può effettuare, alla risposta del nero corrispondono altre 20 possibili mosse che si ramificano da ogni singolo nodo (giungendo così alla creazione di 400 nodi decisionali in sole due mosse, un albero gigantesco).

Vediamo ora un esempio molto semplice di gioco in forma estesa.

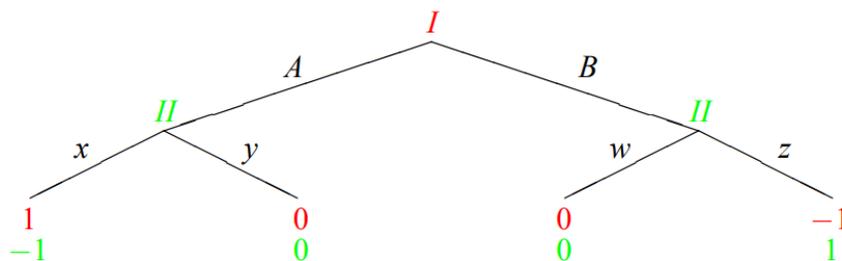


Figure 1: Gioco a due livelli in forma estesa.

Osserviamo che il secondo giocatore, che agisce per minimizzare le perdite e per massimizzare i ricavi, sceglierà sempre y o z . Conseguentemente il primo giocatore sa che scegliendo A o B otterrà, rispettivamente 0 o -1 . Quindi l'*equilibrio di Nash* è dato dalla coppia (A, y) .

Questa è l'idea alla base del *metodo di induzione a ritroso*, si parte dai nodi terminali e si risale l'albero sempre seguendo il principio che ogni giocatore sceglie il meglio per sé.

Questo metodo è applicabile a tutti i giochi di lunghezza finita, ad informazione perfetta e tali che in ogni nodo un giocatore abbia una gamma *finita* di possibili mosse tra cui scegliere.

Siamo a questo punto pronti per enunciare il celebre:

Teorema di Zermelo-Kuhn. *Ogni gioco finito ad informazione perfetta ammette almeno un equilibrio di Nash, individuabile tramite il metodo di induzione a ritroso.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sul numero di nodi, nel caso banale in cui ci sono soli 2 nodi è scontato trovare l'equilibrio di Nash. Consideriamo ora un gioco di lunghezza m e supponiamo che esistano, anche se non unici, degli equilibri di Nash in ogni suo sottogioco.

A questo punto si sceglie, tenendo presenti gli equilibri, di entrare nel sottogioco (o nei sottogiochi) che garantiscono al primo giocatore il massimo *pay-off*. Accoppiando tale mossa a quelle dell'equilibrio del sottogioco si ottiene effettivamente un equilibrio di Nash in strategie pure.

Applicazioni agli scacchi

In realtà il suddetto teorema è solo una generalizzazione proposta da *Harold Kuhn* di un risultato precedentemente enunciato da *Ernst Zermelo*, strettamente legato al gioco degli scacchi.

Teorema. *Nel gioco degli scacchi è valida una ed una sola delle seguenti alternative:*

- *esiste una strategia per il bianco tale che, qualunque strategia usi il nero, il bianco vince;*
- *esiste una strategia per il nero tale che, qualunque strategia usi il bianco, il nero vince;*
- *esiste una strategia per il bianco che gli garantisce almeno il pareggio contro ogni strategia del nero, e viceversa.*

A questo punto si potrebbe ingenuamente pensare di poter risolvere esattamente il problema del gioco degli scacchi trovando un equilibrio con il metodo di induzione a ritroso. Il problema è che sono state effettuate delle stime secondo cui il numero delle possibili partite a scacchi è circa 10^{123} , che è anche superiore alla stima del numero di particelle nell'universo visibile $\simeq 10^{80}$.

Pertanto non esiste ancora un strumento così potente da riuscire a processare una tale mole di dati e si può quindi affermare che il gioco degli scacchi sarà ancora per lungo tempo avvolto dal fascino proprio dei *problemi irrisolti*.