Problema sobre columnas

Cesar Gerardo Zamora[1]

[1]Instituto Tecnologico Superior Zacatecas Occidente

14 de mayo de 2019

Problema

La fórmula para la carga crítica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{p}{EI}v = 0$

El equilibrio del momento requiere que:

$M = -Pv$

$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$

$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pv}{EI}$

Para resolver una ecuacion diferencial debemos proponer una solucion que la satisfaga.

$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) v = 0$

$v = C_1 \sin lx + C_2 \cos lx$

$v^1 = \frac{dv}{dx} = C_1\, l \cos lx - C_2\, l \sin lx$

$v^{ii} = \frac{d^2v}{dx^2} = -C_1\, l^2 \sin lx - C_2\, l^2 \cos lx$

$-C_1 l^2 \sin lx - C_2\, l^2 \cos lx \left(\frac{P}{EI}\right)(C_1 \sin lx + C_2 \cos lx) = 0$

$-C_1 l^2 \sin lx - C_2\, l^2 \cos lx + C_1 \left(\frac{P}{EI}\right) \sin lx + C_2 \left(\frac{P}{EI}\right) \cos lx = 0$

$C_1 \sin lx \left(\frac{P}{EI} - l^2\right) + C_2 \cos lx \left(\frac{P}{EI} - l^2\right) = 0$

$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}\, x} + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}\, x}$

Calculamos valores para las constantes $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$

$v = 0 \qquad x = 0$

$v = 0 \qquad\qquad x = L$

$C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}(0) + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}(0) = 0$

Para $\quad v = 0 \qquad\qquad x = L$

$\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$

$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n \ \pi$

Para poder despejar P se elevan todos los terminos al cuadrado para que pueda quedar lo siguiente:

$\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \right)^2 \ L^2 = n^2 \ \pi^2$

$\frac{P}{EI} \ L^2 = n^2 \ \pi^2$

$P = \frac{n^2 \ \pi^2 \ EI}{L^2} \qquad\qquad n = 1$

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$