Problemas sobre columnas

Esmeralda Contreras-Dgz[1]

[1]Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

12 de mayo de 2019

Resumen

En el presente documento se muestra un problema referente a columnas en donde se satisface una ecuación diferencial.

Problema.

La fórmula para la carga critica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0$

Encuentre la solución a esta ecuación y aplique las siguientes condiciones para obtener los valores para las constantes de integración.

El equilibrio del momento requiere:

$M = -Pv$

$EI\ \frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$

$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Pv}{EI}$

Para resolver una ecuación diferencial se debe proponer una solución que la satisfaga:

$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) = 0$

$v = C_1 \sin Yx + C_2 x$

$v' = \frac{dv}{dx} = C_1 Yx - C_2 Yx$

$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = -C_1 Y^2 x - C_2 Y^2 x$

$-C_1 Y^2 x - C_2 Y^2 x \left(\frac{P}{EI}\right)(C_1 x + C_2 x) = 0$

$-C_1 Y^2 x - C_2 Y^2 x + C_1 \left(\frac{P}{EI}\right) x + C_2 \left(\frac{P}{EI}\right) x = 0$

$C_1 x \left(\frac{P}{EI} - Y^2\right) + C_2 x \left(\frac{P}{EI} - Yx\right) = 0$

$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}x} + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}x}$

Ahora se calculan valores para las constantes C_1 y C_2.

$v = 0 \qquad x = 0$

$v = 0 \qquad x = L$

$C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}\,(O) + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}\,(0) = 0$

Para $v = 0 \qquad x = L$

$v\,(x = L) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$

$\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right) = 0$

$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\Pi$

$\frac{P}{EI} L^2 = n^2 \Pi^2$

$P = \frac{n^2 \Pi^2 EI}{L^2}$ $\qquad n = 1$

$P = \frac{\Pi^2 EI}{L^2}$