Pêndulo de Foucault e Pêndulo Duplo

Lucas da Silva Santos[1]

[1]Affiliation not available

December 26, 2018

Introdução

O objetivo do estudo proposto foi a obtenção da análise matemática de dois mecânismos pendulares, o pêndulo de Foucault e o pêndulo duplo. Os estudos de ambos os mecânismo foram feitos com o Matlab.

Figure 1: Pendulo de Foucault no Panteão em París

O pêndulo de Foucault, assim chamado em referência ao físico francês Jean Bernard Léon Foucault, foi uma experiência proposta pelo físico para prova a rotação da terra, O pendulo foi pendurado no topo do panteâo da França com um fio de 67 metros e um pêndulo de 30 kg a oscilação é demonstranda no plano do solo através de uma quantidade de areia a qual o pêndulo despeja no solo.

A oscilação deste pêndulo mostrou um comportamento singular. As linhas formadas pela oscilação não se sobrepunham, esse comportamento provava empiricamente a rotação da Terra.

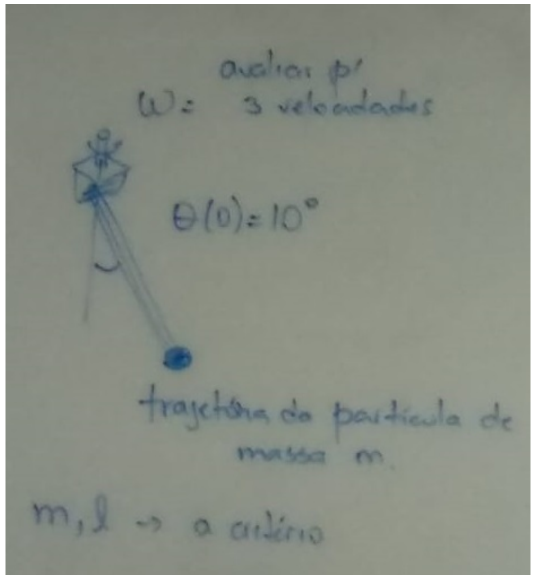

Figure 2: Pêndulo de Foucault proposto em aula

O vetor posição de deste problema pode ser facilmente obtido projetando o vetor da base móvel na base inercial:

$$P = \begin{pmatrix} L\,\cos(\theta_2)\,\sin(\theta_1) \\ L\,\sin(\theta_1)\,\sin(\theta_2) \\ -L\,\cos(\theta_1) \end{pmatrix} \tag{1}$$

A energia cinética translacional fica:

$$K_t = \frac{L^2\,m\,\left(2\,\dot{\theta}_1^2 - \cos(2\,\theta_1)\,\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right)}{4} \tag{2}$$

A energia cinética Rotacional fica:

$$K_r = \frac{L^2\,m\,\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{L^2\,m\,\dot{\theta}_2^2}{4} - \frac{L^2\,m\,\cos(2\,\theta_1)\,\dot{\theta}_2^2}{4} \tag{3}$$

A energia cinética do sistema fica:

$$K = \frac{L^2\,m\,\left(2\,\dot{\theta}_1^2 - \cos(2\,\theta_1)\,\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right)}{2} \tag{4}$$

A energia Potêncial do sistema fica:

$$E_P = -L\, g\, m\, \cos(\theta_1) \tag{5}$$

E por fim o Lagrangeano é obtido com todos essas funções:

$$L = \frac{L^2\, m\, \left(2\, \dot{\theta}_1^2 - \cos(2\, \theta_1)\, \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_2^2\right)}{2} + L\, g\, m\, \cos(\theta_1) \tag{6}$$

A equações do movimento de Euler Lagrange são dadas por:

$$-2\, L^2\, m\, \ddot{\theta}_1 - L\, m\, \left(g\, \sin(\theta_1) - L\, \sin(2\, \theta_1)\, \dot{\theta}_2^2\right) = 0 \tag{7}$$

$$L^2\, m\, (\cos(2\, \theta_1) - 1)\, \ddot{\theta}_2 - L^2\, m\, \sin(2\, \theta_1)\, \dot{\theta}_2\, \dot{\theta}_1\, 2 = 0 \tag{8}$$

Para o estudo em questão foram utilizadas as seguintes condições de contorno:

$$\theta\,(0) = 10 \;\; e \;\; \dot{\theta}(0) = 0 \tag{9}$$

Pêndulo duplo

Um pêndulo duplo consiste em um sistema de particulas com dois pêndulos associados um ao outro, o sistema do pêndulo duplo pode apresentar grande complexidade por influência de condições iniciais específicas. Seu movimento em diversos casos se apresenta de forma caótica, discordando bastante da sua simplicidade aparente.

Os vetores posições deste problema podem ser facilmente obtidos projetando os vetores das bases móveis na base inercial:

$$P_c = \begin{pmatrix} L_2\, \cos(\theta_1) + L_1\, \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_1\, \sin(\theta_1 + \theta_2) - L_2\, \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\mathrm{P}_b = \begin{pmatrix} L_2\, \cos(\theta_1) + \frac{L_2\, \cos(\theta_1 + \theta_2)}{2} \\ -\frac{L_2\, \sin(\theta_1 + \theta_2)}{2} - L_2\, \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} (11)$$

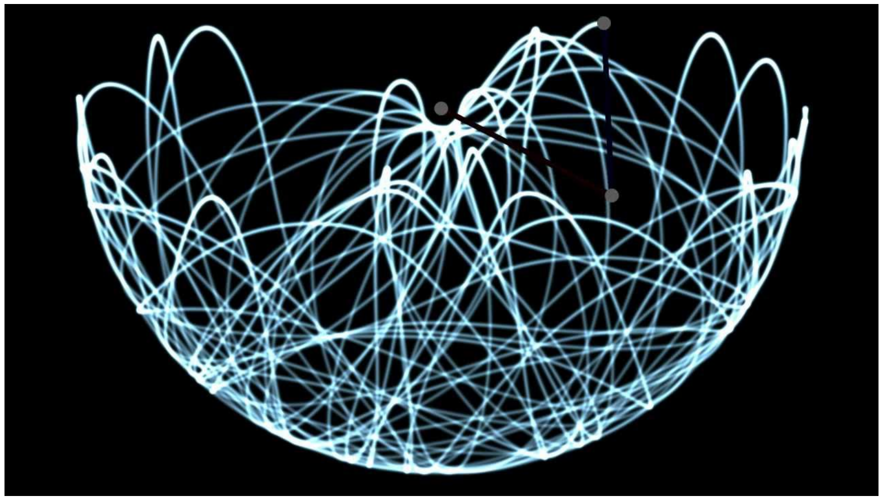

Figure 3: Movimento caótico da extremidade de um pêndulo duplo

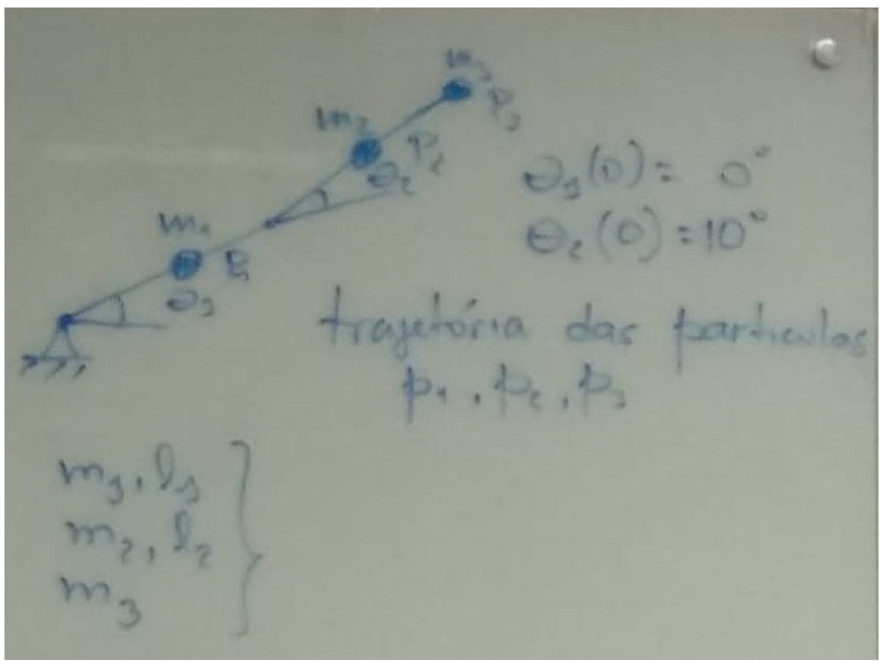

Figure 4: Pêndulo duplo proposto em sala de aula

$$\mathrm{P}_a = \begin{pmatrix} \frac{L_1\ \cos(\theta_1)}{2} \\ -\frac{L_1\ \sin(\theta_1)}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

A energia cinética translacional fica:

$\mathrm{K}_t = \frac{{L_1}^2\, m_a\, \dot{\theta}_1^2}{8} + \frac{5\, {L_2}^2\, m_b, \dot{\theta}_1^2}{8} + \frac{{L_2}^2\, m_b, \dot{\theta}_2^2}{8} + \frac{{L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{{L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_2^2}{2} +$ (13)

$$+\frac{{L_2}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{{L_2}^2\, m_b\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{{L_2}^2\, m_b\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2}{4} + {L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2 + \tag{14}$$

$$+L_1\, L_2\, m_c\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1^2 + \frac{{L_2}^2\, m_b, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_2\, \dot{\theta}_1}{2} + L_1\, L_2\, m_c\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2 \tag{15}$$

A energia cinética Rotacional fica:

$$K_r = \frac{{L_1}^2\, m_a\, \dot{\theta}_1^2}{8} + m_c\, \left(\frac{\dot{\theta}_1}{2} + \frac{\dot{\theta}_2}{2}\right)\, \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\, \left({L_1}^2 + 2\, \cos(\theta_2)\, L_1\, L_2 + {L_2}^2\right) + \tag{16}$$

$$+\frac{{L_2}^2\, m_b\, \left(\frac{\dot{\theta}_1}{2} + \frac{\dot{\theta}_2}{2}\right)\, \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\, (4\, \cos(\theta_2) + 5)}{4} \tag{17}$$

A energia cinética do sistema fica:

$$K = \frac{{L_1}^2\, m_a\, \dot{\theta}_1^2}{4} + \frac{5\, {L_2}^2\, m_b\, \dot{\theta}_1^2}{4} + \frac{3\, {L_2}^2\, m_b\, \dot{\theta}_2^2}{4} + {L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1^2 + {L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_2^2 + \tag{18}$$

$$+{L_2}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1^2 + \frac{{L_2}^2\, m_c\, \dot{\theta}_2^2}{2} + {L_2}^2\, m_b\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1^2 + \frac{{L_2}^2\, m_b\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_2^2}{2} + \tag{19}$$

$$+\frac{3\, {L_2}^2\, m_b\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2}{2} + 2\, {L_1}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2 + {L_2}^2\, m_c\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2 + 2\, L_1\, L_2\, m_c\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1^2 + \tag{20}$$

$$+L_1\, L_2\, m_c\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_2^2 + \frac{3\, {L_2}^2\, m_b\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2}{2} + 3\, L_1\, L_2\, m_c\, \cos(\theta_2)\, \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2 \tag{21}$$

A energia Potêncial do sistema fica:

$$E_P = -g\, m_c\, (L_1, \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_2\, \sin(\theta_1)) - \frac{L_1\, g\, m_a\, \sin(\theta_1)}{2} - \tag{22}$$

$$-\frac{L_2\, g\, m_b\, (2\, \sin(\theta_1) + \sin(\theta_1 + \theta_2))}{2} \tag{23}$$

E por fim o Lagrangeano é obtido com todos essas funções por:

$$L = K - E_p \tag{24}$$

A equações do movimento de Euler Lagrange são dadas por:

$$\tau_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \tag{25}$$

$$\tau_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_2} \tag{26}$$

Para o estudo em questão foram utilizadas as seguintes condições de contorno:

$$\theta_1\left(0\right) = 0 \;\; e \;\; \dot{\theta}_1\left(0\right) = 0 \;\; e \;\; \theta_2\left(0\right) = 10 \;\; e \;\; \dot{\theta}_2\left(0\right) = 0 \tag{27}$$