Séries de Fourier

andrei

antonio.andreilson

Nosso principal objetivo será provar, entre outras coisas, o seguinte:  se  é contínua em todo lugar, e se  é do período 2; se é monótona em partes em [-, ], i.e. se existem números , 0  v    m com    para 1    v    m,  , , de tal modo que f(x) é monótona em cada [ ]; então existem números  independentes de x de tal modo que para todos os x nós temos:

E, de fato isso é realizado por:

Esta é a chamada série de Fourier de .

2) Se removermos a hipótese de monotonicidade por partes, então a conclusão não é válida.

1. Se  <  e se  é corretamente integrável de   para , então

Prova: Seja  dado com a notação usual, com relação a , subdividimos o intervalo  de tal forma que

Para cada

Nós temos que

Notações:  pela observação preliminar ao teorema 457  certamente existe se para algum ,  é limitada e monótona para  ( i.e.  para  ou  para ) e  certamente existe se para algum  é limitada e monótona para

Deixe que  seja corretamente integrável de , deixe que e seja  monótona de  Então temos

Observações preliminares: pelo exemplo do teorema 456 sabemos que a integral a direita existe. A integral á esquerda existe desde:

ou  é contínua em , e, portanto, é integrável de  para .

Prova: 1) Seja . Deixe  ser monótona não decrescente para  (caso contrário, consideramos . Seja ; caso contrário, mudamos a definição de  a     ( o que não afeta a hipótese ou a conclusão.)

Seja dado. Escolha um  tal que  Pelo teorema 405, existe para cada  um  ( dependendo de  e ) tal que    desde que  converge, temos para uma constante universal adequada  que  para  de modo que para  temos  de modo que . Portanto,  é devidamente integrável em . Temos pelo teorema 476 que para um  adequado (dependendo de  e de ) e para

de modo a  Portanto, como afirmamos, temos:

2) No caso geral, segue que de 1), aplicado a  em vez de , que , Mas nós temos   de modo que

3) Seja  corretamente integrável de  para , seja  e deixe  ser monótona para  e para  (não necessariamente no mesmo sentido para ambos os casos.) Seja  definido por (1), então nós temos

Prova: para  inteiro, temos

  e, portanto, para  nós temos  Portanto, nós temos  , a configuração   Nós temos que é contínua em desde que , portanto, pelo teorema 476, temos , daí pelo teorema 477, temos  e , consequentemente . Esta última integral pode ser obtida configurando . Então nós temos   Portanto nós temos .

4) Seja  corretamente integrável de, seja  Deixa-se  e seja  moótona em  e em  ou, deixe  e seja  monónotona em  e em  Sejam  definidos por (1). Então nós temos:

.

Prova: deixe  ser  e seja tão pequeno que dois intervalos de monotonicidade estejam em  Deixe  ter o período  ; pois de outro modo nós mudamos a definição, e sempre definimos  de tal maneira que é do período  mantendo a antiga definição em  Isso não afeta a hipóteseou a conclusão. O último então lê simplesmente  Agora , (no lugar de ), satisfaz as hipóteses do teorema 478 concernentes a . No lugar de  obtemos

Portanto, temos pelo teorema 478 que

Exemplo:

Nós temos que :   , por isso, temos  para  que . Para  cada termo do lado direito é , o que está de acordo com o teorema 479, o que afirma que o valor do lado direito é: .

Se  for substituído por  nós obtemos :

A afirmação 1) da introdução está contida no teorema que acabamos de ver, como um caso muito especial, já que  é suficiente por causa da periodicidade, pois para cada um desses  existe um  no sentido do teorema que acabamos de ver e como o lado direito da igualdade do teorema acima é  por causa da continuidade e, finalmente, a segunda afirmação da introdução!

Nós não temos  para toda função contínua  tendo o período  onde  são determinados por (1).

Prova: se  são inteiros  nós definimos

Então nós temos:

 .

Portanto; temos para  inteiro que

quando

Consequentemente  de modo que por (2), temos para cada inteiro  que  Em particular, temos para  que  .

Agora vamos definir: A série converge uniformemente, já que  portanto, representa uma função contínua em . Nós temos

Se estendermos a definição de  em todos os lugares, tornando-a periódica com o período  então é contínua em todos os lugares  converge uniformemente em  para cada  portanto, , disso nós temos

    , daí, para  inteiros, temos que: de modo que para cada inteiro . Portanto,  não está limitado, logo  diverge.

## 