Séries de Fourier

andrei[1] and antonio.andreilson[1]

[1]Affiliation not available

17 de julho de 2018

Nosso principal objetivo será provar, entre outras coisas, o seguinte: (1) se $f(x)$ é contínua em todo lugar, e se $f(x)$ é do período 2π; se $f(x)$ é monótona em partes em [-π, π], i.e. se existem números x_v, $0 \leq$ v $\leq$ m com $x_{v-1} \leq x_v$ para $1 \leq$ v $\leq$ m, $x_0 = -\pi$, $x_m = \pi$, de tal modo que f(x) é monótona em cada $[\, x_{v-1},\ x_v]$; então existem números a_n , b_n independentes de x de tal modo que para todos os x nós temos:

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos\ nx + b_n sen\ nx$

E, de fato isso é realizado por:

(1) . $\left\{ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\ nx\ dx\ e\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen\ nx\ dx \right\}$

Esta é a chamada série de Fourier de $f(x)$.

2) Se removermos a hipótese de monotonicidade por partes, então a conclusão não é válida.

1. Se $a < b$ e se $f(x)$ é corretamente integrável de a para b, então

$\lim_{w\to\infty}\int_a^b f(x)\, sen\ wx\ dx = 0$

Prova: Seja $\delta > 0$ dado com a notação usual, com relação a $f(x)$, subdividimos o intervalo $[a\ ,\ b]$ de tal forma que

$\sum_{v=1}^{n} e_v s_v < \frac{\delta}{2}$

Para cada $w > \frac{4}{\delta}\sum_{v=1}^{n} |f((a_y)||$

Nós temos que

$\left|\int_a^b f(x)\, sen\ wx\ dx\right| = \left|\sum_{v=1}^{n}\int_{a_{v-1}}^{a_v} f(x)\, sen\ wx\ dx\right| = \left|\sum_{v=1}^{n}\int_{a_{v-1}}^{a_v} f(x) - f(a_v)\right) sen\ wx\ dx +$

$\sum_{v=1}^{n} f(a_v)\int_{a_{v-1}}^{a_v} sen\ wx\ dx\ | \leq \sum_{v=1}^{n} e_v s_v + \sum_{v=1}^{n} |fa_v|\,\frac{2}{w} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$

Notações: $(\rightarrow)\ f_-(\xi) = \lim_{n\to\xi} f(x)\ se\ existir\ e\ (\leftarrow)\ f_+(\xi) = \lim_{n\to\xi} f(x)\ se\ esse\ \lim ite\ existir.$ pela observação preliminar ao teorema 457 $f_+(\xi)$ certamente existe se para algum $c > 0$, $f(x)$ é limitada e monótona para $\xi < x \leq \xi + c$ (i.e. $f(x_2) \leq f(x_1)$ para $\xi < x_2 \leq x_1 \leq \xi + c$ ou $f(x_2) \leq f(x_1)$ para $\xi < x_2 \leq x_1 \leq \xi + c$) e $f_-(\xi)$ certamente existe se para algum $c > 0$, $f(x)$ é limitada e monótona para $\xi - c \leq x < \xi$.

(2) Deixe que $f(x)$ seja corretamente integrável de $0\ a\ \pi$, deixe que $0 < c \leq \pi$ e seja $f(x)$ monótona de $0 < x \leq c$. Então temos

$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = 2f_+(0)\int_0^{\infty}\frac{sen\ y}{y}dy$

Observações preliminares: pelo exemplo do teorema 456 sabemos que a integral a direita existe. A integral á esquerda existe desde:

$G(x) = \left\{sen\ \left(m+\frac{1}{2}\right)x\ \ para\ 0 < x \leq \pi\right\}$ou $\{2m+1,\ \ para\ \ x = 0\}$ é contínua em $[0\ ,\ \pi]$, e, portanto, é integrável de 0 para π.

Prova: 1) Seja $f_+(0) = 0$. Deixe $f(x)$ ser monótona não decrescente para $0 < x \leq c$ (caso contrário, consideramos $-\ f(x)$. Seja $f(0) = 0$; caso contrário, mudamos a definição de $f(x)$ a 0 (o que não afeta a hipótese ou a conclusão.)

Seja $\delta >$ 0dado. Escolha um ϵ tal que $0 < \epsilon < c$, $0 \leq f(\epsilon) < \delta$. Pelo teorema 405, existe para cada $m > 0$ um η (dependendo de δ e m) tal que $0 \leq \eta \leq \epsilon$, $\int_0^{\epsilon} f(x)\frac{sen\ \left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = \int_0^{\epsilon} f(x)\, G(x) = f(\epsilon)\int_{\eta}^{\epsilon} G(x)\, dx = f(\epsilon)\int_{\eta}^{\epsilon}\frac{sen\ \left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = 2f(\epsilon)\int_{\eta\left(m+\frac{1}{2}\right)}^{\epsilon\left(m+\frac{1}{2}\right)}\frac{sen\ y}{y}dy.$ desde que $\int_0^{\infty}\frac{sen\ y}{y}dy$ converge, temos para uma constante universal adequada p que $\left|\int_0^w \frac{sen\ y}{y}dy\right| < p$ para $w \geq 0$, de modo que para $0 \leq a \leq b$ temos $\left|\int_a^b \frac{sen\ y}{y}dy\right| = \left|\int_0^b \frac{sen\ y}{y}dy - \int_0^a \frac{sen\ y}{y}dy\right| < 2p$ de modo que $\left|\int_0^\epsilon f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right| \leq 2f(\epsilon),\ 2p < 4p\delta.$ Portanto, $\frac{f(x)}{\frac{x}{2}}$ é devidamente integrável em $[\epsilon, \pi]$. Temos pelo teorema 476 que para um m_0 adequado (dependendo de ϵ e de δ) e para $m \geq m_0$

$\left|\int_\epsilon^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right| < \delta$ de modo a $\left|\int_0^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right| < (4p+1)\delta$. Portanto, como afirmamos, temos: $\lim_{m\to\infty}\int_0^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = 0$

2) No caso geral, segue que de 1), aplicado a $f(x) - f_+(0)$ em vez de $f(x)$, que $\int_0^\pi (f(x) - f_+(0))\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx \rightarrow 0$, Mas nós temos $\int_0^\pi f_+(0)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = 2f_+(0)\int_0^{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}\frac{sen\ y}{y}dy \rightarrow 2f_+(0)\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy$, de modo que

$\int_0^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx \rightarrow 2f_+(0)\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy.$

3) Seja $f(x)$ corretamente integrável de $-\pi$ para π, seja $0 < c \leq \pi$, e deixe $f(x)$ ser monótona para $-c \leq x < 0$ e para $0 < x \leq c$ (não necessariamente no mesmo sentido para ambos os casos.) Seja a_n definido por (1), então nós temos $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n = \frac{f_-(0)+f_+(0)}{2}$

Prova: para $m > 0$ inteiro, temos $sen\ \frac{x}{2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^m \cos nx\right) = sen\ \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^m\left(-sen\left(n-\frac{1}{2}\right)x + sen\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) =$

$sen\ \left(m+\frac{1}{2}\right)x$, e, portanto, para $0 < |x| < 2\pi$ nós temos $1 + 2\sum_{n=1}^m \cos\ nx = \frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}$ Portanto, nós temos $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^m a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\left(1+2\sum_{n=1}^m \cos\ nx\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}dx +$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(-x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}dx$, a configuração $h(x) = \left\{\frac{1}{\frac{x}{2}} - \frac{1}{sen\ \frac{x}{2}}\ para\ 0 < x \leq \pi;\ 0\ para\ x = 0\right\}$ Nós temos que $h(x)$é contínua em $[0, \pi]$ desde que $(\leftarrow)\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\ \frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{sen\ \frac{x}{2}}\right) = 0.1 = 0$, portanto, pelo teorema 476, temos $\int_0^\pi f(x)\,h(x)\,sen\ \left(m+\frac{1}{2}\right)x\ dx \rightarrow 0\ e\ \int_0^\pi f(-x)\,h(x)\,sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x\ dx \rightarrow 0$, daí pelo teorema 477, temos $\int_0^\pi f(x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}dx \rightarrow 2f_+(0)\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy$ e $\int_0^\pi f(-x)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen\ \frac{x}{2}}dx \rightarrow 2f_-(0)\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy$, consequentemente $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n = \frac{f_-(0)+f_+(0)}{2}\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy$. Esta última integral pode ser obtida configurando $f(x) = 1$. Então nós temos $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi dx = 1,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi \cos\ nx\ dx =$ $\frac{1}{\pi}\left\{\frac{sen\ y}{y}\right\}_{-\pi}^{\pi} = 0\ para\ n > 0.$ Portanto nós temos $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy,\ \int_0^\infty \frac{sen\ y}{y}dy = \frac{\pi}{2}$.

4) Seja $f(x)$ corretamente integrável de$-\pi\ para\ \pi$, seja $c > 0$. Deixa-se $-\pi < \xi < \pi$ e seja $f(x)$ moótona em $\xi - c \leq x < \xi$ e em $\xi < x \leq c + \xi$, ou, deixe $\xi = -\pi$ e seja $f(x)$ monónotona em $\pi - c \leq x < \pi$ e em $-\pi < x \leq -\pi + c$. Sejam $a_n,\ b_n$ definidos por (1). Então nós temos: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^\infty\left(a_n \cos\ n\xi\ +\ b_n sen\ n\xi\right) =$

$\left\{\frac{f_-(\xi)+f_+(\xi)}{2}\ para\ -\pi < \xi < \pi;\ \frac{f_-(\pi)+f_+(-\pi)}{2}\ para\ \xi = -\pi\right\}.$

Prova: deixe c ser $< \pi$ e seja tão pequeno que dois intervalos de monotonicidade estejam em $-\pi < x < \pi$. Deixe $f(x)$ ter o período 2π; pois de outro modo nós mudamos a definição, e sempre definimos $f(x)$ de tal maneira que é do período 2π, mantendo a antiga definição em $-\pi \leq x \leq \pi$. Isso não afeta a hipóteseou a conclusão. O último então lê simplesmente $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty\left(a_n \cos\ n\xi\ + b_n sen\ n\xi\right) = \frac{f_-(\xi)+f_+(\xi)}{2}$. Agora $F(x) = f(x+\xi)$, (no lugar de $f(x)$), satisfaz as hipóteses do teorema 478 concernentes a $f(x)$. No lugar de πa_n obtemos $\int_{-\pi}^\pi f(y+\xi)\cos\ ny\ dy = \int_{-\pi+\xi}^{\pi+\xi}\cos\ n(x-\xi)\,dx = \int_{-\pi+\xi}^\pi + \int_\pi^{\pi+\xi} = \int_{-\pi+\xi}^\pi f(x)\cos\ n(x-\xi)\,dx +$ $\int_{-\pi}^{-\pi+\xi} f(y+2)\cos\ n(y+2\pi-\xi)\,dy = \int_{-\pi+\xi}^\pi f(x)\cos\ n(x-\xi)\,dx + \int_{-\pi}^{-\pi+\xi} f(y)\cos\ n(y-\xi)\,dy =$

$\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos\ n(x-\xi)\,dx =$

$\cos\ n\xi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nx\ dx\ + sen\ n\xi\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen\ nx\ dx =$

$\pi\left(a_n\cos\ n\xi + b_n\ sen\ n\xi\right)$. Portanto, temos pelo teorema 478 que $\frac{f_-(\xi)+f_+(\xi)}{2} = \frac{F_-(0)+F_+(0)}{2} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\ n\xi\ + b_n sen\ n\xi\right)$.

Exemplo: $f(x) = x\ em\ [-\pi,\ \pi]$

Nós temos que : $\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi}\cos\ nx\ dx = \int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi} x\ \cos\ nx\ dx - \int_0^{\pi} y\cos\ ny\ dy = 0$, $\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} x\ sen\ nx\ dx = \left\{-x\frac{\cos\ nx}{n}\right\}_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ nx\ dx = -\frac{2\pi(-1)^n}{n}$, por isso, temos para $-\pi < x < \pi$ que $x = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sen\ nx}{n} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\ n(x+\pi)}{n}$. Para $x = -\pi$ cada termo do lado direito é 0, o que está de acordo com o teorema 479, o que afirma que o valor do lado direito é: $\frac{f_-(\pi)+f_+(-\pi)}{2} = \frac{\pi+(-\pi)}{2} = 0$.

Se x for substituído por $x-\pi$ nós obtemos :$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\ nx}{n} = \left\{0\ para\ x = 0;\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\ para\ 0 < x < 2\pi\right\}$

A afirmação 1) da introdução está contida no teorema que acabamos de ver, como um caso muito especial, já que $-\pi \le \xi < \pi$ é suficiente por causa da periodicidade, pois para cada um desses ξ existe um c no sentido do teorema que acabamos de ver e como o lado direito da igualdade do teorema acima é $f(\xi)$ por causa da continuidade e, finalmente, a segunda afirmação da introdução!

Nós não temos $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\ nx\ +\ b_n\ sen\ nx\right)$ para toda função contínua $f(x)$ tendo o período 2π onde $a_n\ e\ b_n$ são determinados por (1).

Prova: se $n\ e\ v$ são inteiros ≥ 0 nós definimos $A_{v,n} = \int_0^{\pi} 2sen\left(v+\frac{1}{2}\right)x\cos\ nx\ dx$

Então nós temos:

(2) $A_{v,n} = \int_0^{\pi}\left(sen\left(v+\frac{1}{2}\right)x + sen\left(v+\frac{1}{2}-n\right)x\right)dx = \frac{1}{v+\frac{1}{2}+n} + \frac{1}{v+\frac{1}{2}-n} = 2\frac{v+\frac{1}{2}}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}\{> 0\ para\ n \le v;\ < 0\ para\ n > v\}$.

Portanto; temos para $m > 0$ inteiro que $\frac{1}{2}A_{v,0} + \sum_{n=1}^{m} A_{v,n} = \sum_{n=-m}^{m}\frac{1}{v+\frac{1}{2}+n} = \sum_{n=m-2v}^{m}\frac{1}{v+\frac{1}{2}+n} \to 0$

quando $m \to \infty$.

Consequentemente $\frac{1}{2}A_{v,0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{v,n} = 0$, de modo que por (2), temos para cada inteiro $m > 0$ que $S_{v,m} = \frac{1}{2}A_{v,0} + \sum_{n=1}^{m} A_{v,n} > 0$. Em particular, temos para $v \ge 1$ que $S_{v,v} = \frac{1}{2}A_{v,0} + \sum_{n=1}^{v} A_{v,n} > \sum_{n=1}^{v}\frac{1}{v+\frac{1}{2}-n} > \sum_{n=1}^{v}\frac{1}{v+1-n} = \sum_{k=1}^{v}\frac{1}{k} > \int_1^{v}\frac{dy}{y} = \ln v$.

Agora vamos definir:$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{sen\left(\left(2^{h^2}+1\right)\frac{|x|}{2}\right)}{h^2}\ para\ -\pi \le x \le \pi$. A série converge uniformemente, já que $|sen| \le 1$; portanto, representa uma função contínua em $[-\pi,\ \pi]$. Nós temos $f(-\pi) = f(\pi)$.

Se estendermos a definição de $f(x)$ em todos os lugares, tornando-a periódica com o período 2π, então $f(x)$é contínua em todos os lugares $\sum_{h=1}^{\infty}\frac{sen\left(\left(2^{h^2}+1\right)\frac{x}{2}\right)\cos\ nx}{h^2}$ $(= f(x)\cos\ nx)$ converge uniformemente em $[0,\pi]$ para cada $n \ge 0$ portanto, $|sen.\cos| \le 1$, disso nós temos $\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\ nx\ dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos\ nx\ dx = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}\int_0^{\pi} 2sen\left(\left(2^{h^2}+1\right)\frac{x}{2}\right)\cos\ nx\ dx = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}A_{2^{h^2}-1,n}$, daí, para $m > 0\ e\ k > 0$ inteiros, temos que:$S_m = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_k = \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^2}S_{2^{h^2}-1,m} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}S_{2^{k^2}-1,m}$ de modo que para cada inteiro $k > 0$, $S_{2^{k^2}-1} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}S_{2^{k^2}-1,2^{k^2}-1} > \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\ln\left(2^{k^2}-1\right) = \frac{k^3-1}{k^2}\cdot\frac{\ln 2}{\pi}$. Portanto, S_m não está limitado, logo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\ (n.0) + b_n sen\,(n.0)\right)$ diverge.