Problemas acerca de líneas de espera

Alma Flores-Ayala
Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

Introducción

Se conoce como línea de espera a una hilera formada por uno o varios clientes que aguardan para recibir un servicio. Los clientes pueden ser personas, objetos, maquinas que requieren mantenimiento, contenedores con mercancías en espera de ser embarcados o elementos de inventario a punto de ser utilizados. Las líneas de espera se forman a causa de un desequilibrio temporal entre la demanda de un servicio y la capacidad del sistema para suministrarlo.

Metodología

El modelo general asume que tanto las tasas de entrada como de salida dependen del estado; lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio.

Resultados

A continuación describiremos el enunciado y solución.

El modelo de B&K opera con tres cajas. El gerente utiliza el siguiente programa para determinar la cantidad de cajas en operación, según la cantidad de clientes que hayan en la linea.

A continuación se muestra la relación de caja- cliente en la tabla I . los clientes llegan al área de cajas de acuerdo con una

Cantidad de clientes en la tienda	Cantidad de cajas en operación
1 a 3	1
4 a 6	2
Más de 6	3

Cuadro I. Caja-cliente

distribución de Poisson con tasa media de 10 clientes por hora. El tiempo entre llegadas en el área de cajas es exponencial con media de 6 minutos y que el tiempo en la caja por cliente también es exponencial con media de 15 minutos. Determine las probabilidades de estado estable P_n para todas las n.

Solución

Primero se obtiene el valor de λ y μ

λ_0=λ_n=λ=10 clientes por hora

μ_n=$\{\mu_1 = 4 \; clientes \; por \; hora\}$ n=0, 1, 2, 3

$= \{\mu_2 = 8 \; clientes \; por \; hora\}$ n=4, 5, 6

$= \{\mu_3 = 12 \; clientes \; por \; hora\}$ n=7, 8, ..

Se sigue esta formula para al final sustituir los valores obtenidos.

$$P_n = \left(\frac{\lambda_{n-1} \;\; \lambda_{n-2} \;\; .... \;\; \lambda_0}{\mu_n \;\; \mu_{n-1} \;\; .... \;\; \mu_1}\right) \; Po, \; n = 1, \; 2, \; ...$$

Para

$$P_1 = \left(\frac{10}{4}\right) \; P_0$$

$$P_2 = \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \; P_0 \; = \; \left(\frac{10}{4}\right)^2 \; P_0$$

$$P_3 = \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \; P_0 = \left(\frac{10}{4}\right)^3 \; P_0$$

$$P_4 = \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \; P_0 = \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right)^3 \; P_0$$

$$P_5 = \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \; P_0 = \left(\frac{10}{8}\right)^2 \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0$$

$$P_6 = \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) P_0 = \left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0$$

$$P_{n\geq 7} = \left(\frac{10}{12}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) \left(\frac{10}{4}\right) P_0 = \left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left(\frac{10}{12}\right)^{n-6} P_0$$

A continuación se sustituyen los valores en la siguiente formula.

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_{n\geq 7} = 1$$

$$P_0 + \left(\frac{10}{4}\right) P_0 + \left(\frac{10}{4}\right)^2 P_0 + \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0 + \left(\frac{10}{8}\right) \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0 +$$

$$\left(\frac{10}{8}\right)^2 \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0 + \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left(\frac{10}{4}\right)^3 P_0 + \left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left(\frac{10}{12}\right)^{n-6} = 1$$

Se reduce

$$P_0 \left\{1 + \frac{10}{4} + \left(\frac{10}{4}\right)^2 + \left(\frac{10}{4}\right)^3 + \left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right) + ...\right\}$$

$$\dots \left\{\left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right)^2 + \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left(\frac{10}{4}\right)^3 + ...\right\}$$

$$\dots \left\{\left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left(\frac{10}{12}\right)^{n-6}\right\} = 1$$

$$P_0 \left[69.32 + \left(\frac{10}{4}\right)^{\{3\}} \left(\frac{10}{8}\right)^{\{3\}} \left\{1 + \left(\frac{10}{12}\right) + \left(\frac{10}{12}\right)^{\{2\}} + ...\right\}\right]$$

$$P_0 \left\{69.32 + \left(\frac{10}{4}\right)^{\{3\}} \left(\frac{10}{8}\right)^{\{3\}} \left[\frac{1}{1-\frac{10}{12}}\right]\right\} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{69.32 + \left(\frac{10}{4}\right)^3 \left(\frac{10}{8}\right)^3 \left[\frac{1}{1-\frac{10}{12}}\right]}$$

$$= 3.96^{-3}$$

Conclusión

El análisis de lineas de espera es de interés para los gerentes porque afecta el diseño, la planificación de la capacidad, la planificación de la distribución de espacio, la administración de inventarios y la programación.