Problemas sobre columnas

Denis Puente Estrada[1]

[1]Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

13 de mayo de 2019

Resumen

En el siguiente documento se muestra un problema sobre columnas en donde se dará solución mediante una serie de pasos a seguir.

Las estructuras sometidas a cargas pueden fallar de diversas maneras dependiendo del tipo de estructura, las condiciones de los soportes, los tipos de cargas y los materiales usados, por ejemplo, el eje de un vehículo puede fracturarse de repente debido a ciclos repetidos de carga o un miembro a tensión puede alargarse de forma excesiva, de manera que ya no pueda efectuar las funciones para las que fue diseñado. (Careglio, Mirasso, & García Garino, 2007)

La fórmula para la carga crítica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI} = 0$

Encuentre la solución a esta ecuación y aplique las siguientes condiciones para obtener los valores para las constantes de integración:

$v|_{x=0} = 0$

$v|_{x=L} = 0$

Finalmente explique como obtener el siguiente resultado:

$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

Solución:

$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right) v = 0$

El primer paso el derivar

$v = C_1 \sin lx + C_2 \cos lx$

$v' = \frac{dv}{dx} = C_1 l \cos - C_2 l \sin lx$

$v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = C_1 l^2 \sin lx - C_2 l^2 \cos lx$

El segundo paso es factorizar

$-C_1 l^2 \sin lx - C_2 l^2 \cos lx + \left(\frac{p}{EI}\right)(C_1 \sin lx + C_2 \cos lx = 0)$

$C_1 l^2 \sin lx - C_2 l^2 \cos lx + C_1 \left(\frac{p}{EI}\right) \sin lx + C_2 \left(\frac{p}{EI}\right) \cos lx = 0$

$C_1 \sin lx \left(\frac{p}{EI} - x^2\right) + C_2 \cos lx \left(\frac{p}{EI} - x^2\right) = 0$

$\frac{p}{EI} = l^2 \qquad l = \sqrt{\frac{p}{EI}}$

$v = C_1 \sin \sqrt{\frac{p}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{p}{EI}} x$

$v = 0 \ I \quad x = 0$

$v = 0 \; I \quad x = L$

$C_1 \sin\sqrt{\frac{p}{EI}}\,(o) + C_2 \cos\sqrt{\frac{p}{EI}}\,(0) = 0$

Luego Para: $v = 0 \qquad x = L$

$v\,(x = L) \;=\; C_1 \sin\sqrt{\frac{p}{EI}}L \;=\; 0v\,(x = L) \;=\; C_1 \sin\sqrt{\frac{p}{EI}}L = 0$

$\sin\left(\sqrt{\frac{p}{EI}}L\right) = 0$

$\sqrt{\frac{p}{EI}} = L = n\pi$

Se despeja P

$\frac{p}{EI}L^2 = n^2\pi^2$

$p = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$

Para calcular la critica

n=1

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

Referencias

Careglio, C., Mirasso, A., & García Garino, C. (2007). Estudio numérico de una columna cruciforme en grandes deformaciones. *MecáNica Computacional*, *26*, 129–143.