Problemas sobre columnas

Mayra Puente Estrada[1]

[1]Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

14 de mayo de 2019

Problema

La formula para la carga critica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0$$

Encuentre la solución a esta ecuación y aplique las siguientes condiciones para obtener los valores para las constantes de integración.

$$v|_{x=0} = 0$$
$$v|_{x=L} = 0$$

Figura 1: condiciones.

Para determinar la carga critica y la forma de pandeamiento de la columna se utilizara la siguiente ecuación.

$$EI\ \frac{d^2\ v}{d\ x^2} = M$$

En donde M es igual a:

$$M = -Pv$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuacion tenemos:

$$EI\ \frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

Para resolver una ecuación diferencial debemos proponer una solución que la satisfaga, por lo cual seria la siguiente ecuación, en donde se deriva dos veces y luego se suma .

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{\frac{P}{EI}}C1 \quad \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - \sqrt{\frac{P}{EI}}C2\ \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left(\frac{P}{EI}\right) \quad C1 \quad \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}\ x}\right) - \left(\frac{P}{EI}\right)\ C2\ \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}\ x}\right) +$$

$$\left(\frac{P}{EI}\right) \quad C1 \quad \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}\ x}\right) + \left(\frac{P}{EI}\right)\ C2\ \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}x}\right)$$

Para determinar los valores de C1 y C2 utilizaremos las condiciones a la frontera

Las condiciones

$v = 0 \quad en \quad x \;\; y \;\; c2 = 0$

Y la otra es que

$v = 0 \;\; en \;\; x = L$

Finalmente explique como obtener el siguiente resultado.

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Figura 2: resultado.

Para que la ecuación se cumpla se debe considerar:

$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right) = 0$

En donde conviene lo suiguiente:

$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n \ \pi$

De este modo despejando P tendremos que:

$\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)^2 \quad L^2 = (n \ \pi)^2$

$\frac{P}{EI} \ L^2 \ = (n \ \pi^2) \ en \ donde \ \ P = \frac{(n \ \pi)^2 \ EI}{L}$

La P ocurre cuando n=1 en ese momento ocurre el primer pandeamiento.