

Problema sobre columnas

Osiel Estrada-Nava

Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

Resumen—En esta practica resolveremos un problema relacionado con columnas mediante el uso de ecuaciones diferenciales.

Planteamiento del problema

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0 \quad (1)$$

$$v|_{x=0} = 0$$

$$v|_{x=L} = 0$$

Lo primero es proponer una ecuación que contenga constantes.

$$V = C1 \sin \lambda x + C2 \cos \lambda x$$

En esta parte del procedimiento debemos calcular la 1era y 2da derivada ya que es lo que nos pide la formula 1:

$$V' = \frac{dv}{dx} = C1 \lambda \cos \lambda x - C2 \lambda \sin \lambda x$$

$$V'' = \frac{d^2v}{dx^2} = -C1 \lambda^2 \sin \lambda x - C2 \lambda^2 \cos \lambda x$$

Después de obtener las derivadas empezamos a construir la ecuación con V' y V'' y agregar $\left(\frac{P}{EI}\right)$.

$$-C1 \lambda^2 \sin \lambda x - C2 \lambda^2 \cos \lambda x + \left(\frac{P}{EI}\right)(C1 \sin \lambda x + C2 \cos \lambda x) = 0$$

$$-C1 \lambda^2 \sin \lambda x - C2 \lambda^2 \cos \lambda x + C1 \left(\frac{P}{EI}\right) \sin \lambda x + C2 \left(\frac{P}{EI}\right) \cos \lambda x = 0$$

Ya construida la ecuación vemos que tenemos términos semejantes y lo factorizamos:

$$C1 \sin \lambda x \left(\frac{P}{EI} - \lambda^2\right) + C2 \cos \lambda x \left(\frac{P}{EI} - \lambda^2\right) = 0$$

En esta parte del análisis debemos encontrar un valor que al sustituirlo en los paréntesis nos de 0 y se cumpla la ecuación.

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Sustituimos el valor obtenido en V :

$$V = C1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}x + C2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}x$$

Ahora solo resta obtener los valores de las constantes $C1$ y $C2$:

$$C1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}(0) + C2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}}(0) = 0$$

Para $v = 0$ y $x = 0$

$$V(x = L) = C1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}}L = 0$$

$$\sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

por lo tanto queda:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

Bonus : Cada vez que el argumento es igual a $n\pi$, el *sen* es = 0 esto se obtiene gracias a que analizando la grafica de la funcion seno cada vez que toma valor de π su valor es cero..

Entonces el resultado de esta ecuación diferencial es:

$$\frac{P}{EI} L^2 = n^2 \pi^2$$

Para calcular la carga critica hacemos $n = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$C1$ = Representa que tanto se pandea la columna.