Proyecto 2: Formulación Galerkin: Matríces de elementos

Camilo Alarcón[1], Humberto Campos[1], Gabriel Galilea[1], Lucía Márquez[1], and Fernando Reyes[1]

[1]Universidad Austral de Chile

1 Problema de conductividad térmica

2 Resolución

2.1 Desarrollo de las matrices elementales.

Para el sistema se tiene que:

$$\{R\} = [K]\{\Phi\} - \{F\} = \{0\} \tag{1}$$

Para matrices triangulares:

$$\left[K_D^{(e)}\right] = \frac{D_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & b_j^2 & b_jb_k \\ b_ib_k & b_jb_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c_j^2 & c_jc_k \\ c_ic_k & c_jc_k & c_k^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Para matrices rectangulares:

$$\left[K_D^{(e)}\right] = \frac{D_xw}{6l}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{D_yl}{6w}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Para el cálculo de las matrices de cada elemento, se tiene lo siguiente:

e	i	j	k o m	n
1	1	2	5	
2	1	5	4	
3	2	3	6	5
4	4	5	8	7

Los elementos (1) y (2) corresponden a elementos triangulares. Y los elementos (3) y (4) corresponden a elementos rectangulares.

Entonces,

Para el elemento (1):

$$\left[K_D^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

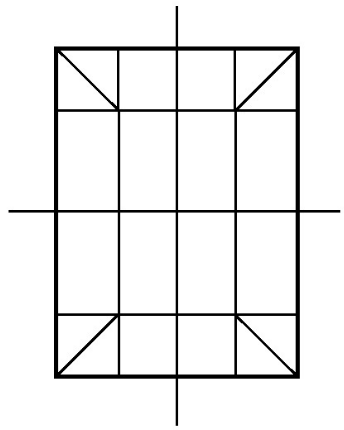

Figure 1: Figura a analizar

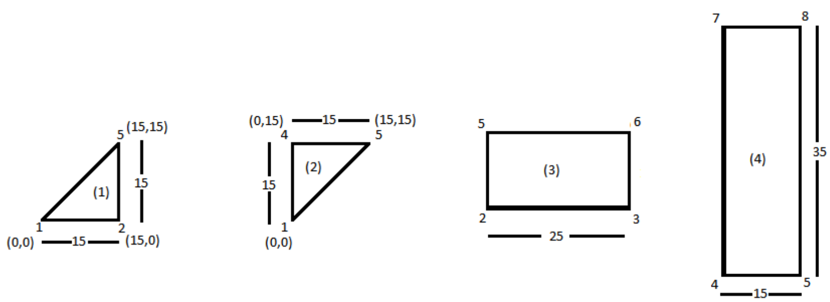

Figure 2: Elementos de la figura a analizar

Para el elemento (2):

$$\left[K_D^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0.4 & -0.4 \\ -0.4 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Para el elemento (3):

$$\left[K_D^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 0.604 & 0.062 & -0.302 & -0.364 \\ 0.062 & 0.604 & -0.364 & -0.302 \\ -0.302 & -0.364 & 0.604 & 0.062 \\ -0.364 & -0.302 & 0.062 & 0.604 \end{bmatrix}$$

Para el elemento (4):

$$\left[K_D^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 0.736 & -0.565 & -0.368 & 0.197 \\ -0.565 & 0.736 & 0.197 & -0.368 \\ -0.368 & 0.197 & 0.736 & -0.565 \\ 0.197 & -0.368 & -0.565 & 0.736 \end{bmatrix}$$

2.2 Desarrollo de las matrices de condiciones convectividad.

Para elementos triangulares, nodos i y j:

$$\left[K_C^{(e)}\right] = \frac{hl_{ij}}{6}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\left[F^{(e)}\right] = \frac{hT_f l_{ij}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \tag{5}$$

Para elementos rectangulares, nodos i y j:

$$\left[K_C^{(e)}\right] = \frac{hl_{ij}}{6}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\left[F^{(e)}\right] = \frac{hT_f l_{ij}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7}$$

Para el elemento (1):

$$\left[K_C^{(1)}\right] = \begin{bmatrix}1.5 & 0.75 & 0\\0.75 & 1.5 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(1)}\right] = \begin{bmatrix}22.5\\22.5\\0\end{bmatrix}$$

Para el elemento (2):

$$\left[K_C^{(2)}\right] = \begin{bmatrix}1.5 & 0 & 0.75\\0 & 0 & 0\\0.75 & 0 & 1.5\end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(2)}\right] = \begin{bmatrix}22.5\\0\\22.5\end{bmatrix}$$

Para el elemento (3):

$$\left[K_C^{(3)}\right] = \begin{bmatrix}2.5 & 1.25 & 0 & 0\\1.25 & 2.5 & 0 & 0\\0 & 0 & 16.666 & 8.333\\0 & 0 & 8.333 & 16.666\end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 37.5 \\ 37.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el elemento (4):

$$\left[K_C^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 1.75 \\ 0 & 23.334 & 11.667 & 0 \\ 0 & 11.667 & 23.334 & 0 \\ 1.75 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}$$

$$\left[F^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 52.5 \\ 0 \\ 0 \\ 52.5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para la matrices globales se tiene:

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} 3.8 & 0.35 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 5.404 & 1.312 & 0 & -0.764 & -0.302 & 0 & 0 \\ 0 & 1.312 & 3.104 & 0 & -0.302 & -0.364 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 6.536 & -0.965 & 0 & 1.947 & -0.368 \\ 0 & -0.764 & -0.302 & -0.965 & 42.14 & 8.395 & -0.368 & 11.864 \\ 0 & -0.302 & -0.364 & 0 & 8.395 & 17.27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.947 & -0.368 & 0 & 4.236 & -0.565 \\ 0 & 0 & 0 & -0.368 & 11.864 & 0 & -0.565 & 24.07 \end{bmatrix}$$

$$\left[F\right] = \begin{bmatrix} 45 \\ 60 \\ 37.5 \\ 75 \\ 0 \\ 0 \\ 52.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la condición de frontera de temperatura constante en los nodos 5, 6 y 8 se tiene lo siguiente:

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} 3.8 & 0.35 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 5.404 & 1.312 & 0 & -0.764 & -0.302 & 0 & 0 \\ 0 & 1.312 & 3.104 & 0 & -0.302 & -0.364 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 6.536 & -0.965 & 0 & 1.947 & -0.368 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.947 & -0.368 & 0 & 4.236 & -0.565 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 45 \\ 60 \\ 37.5 \\ 75 \\ 150 \\ 150 \\ 52.5 \\ 150 \end{bmatrix}$$

2.3 Resolución del sistema de ecuaciones globales.

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3.8 & 0.35 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 5.404 & 1.312 & 0 & -0.764 & -0.302 & 0 & 0 \\ 0 & 1.312 & 3.104 & 0 & -0.302 & -0.364 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 6.536 & -0.965 & 0 & 1.947 & -0.368 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.947 & -0.368 & 0 & 4.236 & -0.565 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45 \\ 60 \\ 37.5 \\ 75 \\ 150 \\ 150 \\ 52.5 \\ 150 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Las temperaturas en cada nodo son:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 5.795°C \\ \Phi_2 &= 32.951°C \\ \Phi_3 &= 30.338°C \\ \Phi_4 &= 32.7°C \\ \Phi_5 &= 150°C \\ \Phi_6 &= 150°C \\ \Phi_7 &= 30.402°C \\ \Phi_8 &= 150°C \end{aligned} \tag{9}$$

3 Programación

3.1 Descripción General

El programa resuelve mediante Formulación Galerkin el problema planteado de la **Fig.1**. Se desarrollan las matrices de cada elemento y las matrices globales. Determina los valores nodales resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. Y permite calcular el valor de un punto x, y dentro de la chimenea. Otorga también, la posibilidad de editar los valores de D y h.

3.2 Función Elemento

Esta función despliega en pantalla la matriz de cada elemento. Cada matriz es calculada por el programa según la definición descrita en (2), (4) y (5) si corresponden a elementos triangulares y (3), (6) y (7) si son elementos rectangulares.

3.3 Función Global

Despliega la matriz de rigidez global, que se obtienen mediante la suma de las matrices de elementos considerando las posiciones de estas.

3.4 Función Valores Nodales

La función despliega en panatalla el valor de cada nodo. Cada valor es calculado a partir del sistema de ecuaciones descritas en (8).

3.5 Función Temperatura

Esta función recibe un valor x, y y dependiendo de su ubicación, es decir, dentro de que elemento se encuentre, se calculará su valor considerando los nodos correspondientes a ese elemento. Si x, y no está dentro del rango definido, el programa termina la ejecución de ese método con un mensaje de error que esta fuera de rango.

3.6 Función Cambio Valores

Esta función permite cambiar los valores de D y h.

3.7 Función Graficar Temperatura

Esta función nos permite visualizar la temperatura en cada sección de la placa .