

Proyecto 1. Formulación Galerkin: Matríces de elementos:

Camilo Alarcón Romero¹, Lucía Márquez Esprel¹, Humberto Campos Avila¹, Fernando Reyes Diaz¹, and Gabriel Galilea Lastra¹

¹Universidad Austral de Chile

1 Problema de conductividad térmica

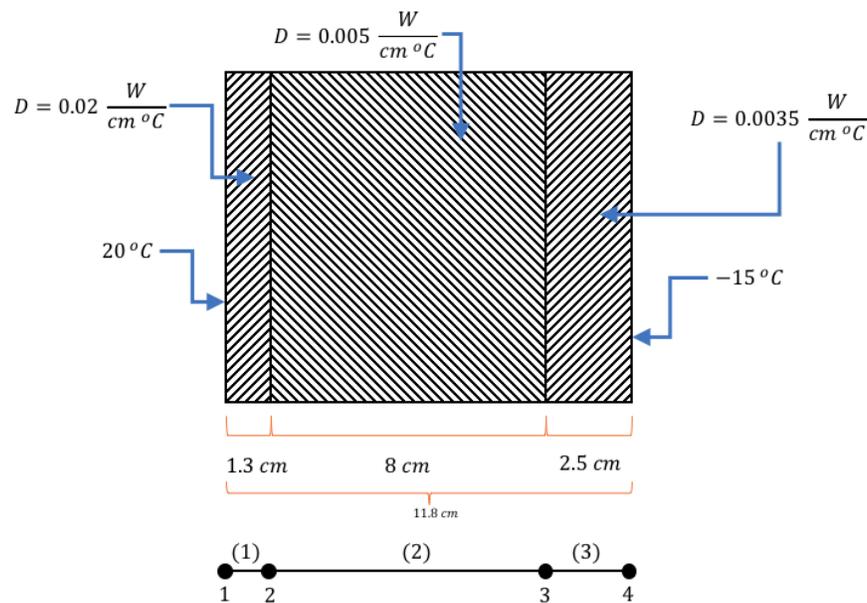


Figure 1: Conductividad termal

2 Resolución

2.1 Desarrollo de las matrices por método directo.

Para el sistema se tiene que:

$$\{R\} = [K] \{\Phi\} - \{F\} = \{0\} \quad (1)$$

Siendo $\{\Phi\}$ los valores nodales, $[K]$ la matriz de rigidez y $\{F\}$ la matriz de fuerza, definidos como:

$$[K] = \frac{D}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\{F\} = \frac{QL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

De la **Fig.1** se obtienen los siguientes valores:

e	i	j	D	L	Q	D/L	QL/2
1	1	2	0.02	1.3	0	$\frac{1}{65}$	0
2	2	3	0.005	8	0	6.25×10^{-4}	0
3	3	4	0.0035	2.5	0	1.4×10^{-3}	0

Condiciones iniciales:

$$y(0) = 20$$

$$y(11.8) = -15$$

Calculando las matrices para cada elemento, se obtiene lo siguiente:

$$[K^{(1)}] = \frac{1}{65} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{65} & -\frac{1}{65} \\ -\frac{1}{65} & \frac{1}{65} \end{bmatrix}$$

$$[K^{(2)}] = 6.25 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.25 \times 10^{-4} & -6.25 \times 10^{-4} \\ -6.25 \times 10^{-4} & 6.25 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[K^{(3)}] = 1.4 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \times 10^{-3} & -1.4 \times 10^{-3} \\ -1.4 \times 10^{-3} & 1.4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

A partir de lo anterior, se calculan las matrices globales:

Primer elemento:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{65} & -\frac{1}{65} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{65} & \frac{1}{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Segundo elemento:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{65} & -\frac{1}{65} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{65} & \frac{333}{20800} & -6.25 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & -6.25 \times 10^{-4} & 6.25 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tercer elemento:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{65} & -\frac{1}{65} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{65} & \frac{333}{20800} & -6.25 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & -6.25 \times 10^{-4} & 2.025 \times 10^{-3} & -1.4 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & -1.4 \times 10^{-3} & 1.4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Considerando (1), finalmente se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{65} & -\frac{1}{65} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{65} & \frac{333}{20800} & -6.25 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & -6.25 \times 10^{-4} & 2.025 \times 10^{-3} & -1.4 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & -1.4 \times 10^{-3} & 1.4 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 Resolución del sistema de ecuaciones globales.

Considerando entonces, la segunda y tercera fila de la matriz anterior:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{65} \cdot \Phi_1 + \frac{333}{20800} \cdot \Phi_2 - 6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_3 &= 0 \\ -6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_2 + 2.025 \times 10^{-3} \cdot \Phi_3 - 1.4 \times 10^{-3} \cdot \Phi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores $\Phi_1 = 20$ y $\Phi_4 = -15$ en el sistema:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{65} \cdot 20 + \frac{333}{20800} \cdot \Phi_2 - 6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_3 &= 0 \\ -6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_2 + 2.025 \times 10^{-3} \cdot \Phi_3 - 1.4 \times 10^{-3} \cdot (-15) &= 0 \end{aligned}$$

Calculando y despejando:

$$\begin{aligned} \frac{333}{20800} \cdot \Phi_2 - 6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_3 &= \frac{4}{13} \\ -6.25 \times 10^{-4} \cdot \Phi_2 + 2.025 \times 10^{-3} \cdot \Phi_3 &= -0.021 \end{aligned}$$

Al desarrollar el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{63435}{3331} \approx 19.044 \\ \Phi_3 &= -\frac{14965}{3331} \approx -4.4926 \end{aligned}$$

Finalmente, las temperaturas en cada nodo son:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 20^\circ C \\ \Phi_2 &= 19.044^\circ C \\ \Phi_3 &= -4.4926^\circ C \\ \Phi_4 &= -15^\circ C \end{aligned}$$

3 Programación

3.1 Descripción General

El programa resuelve mediante Formulación Galerkin el problema planteado en la **Fig.1**. Se desarrollan las matrices de cada elemento y las matrices globales. Determina los valores nodales resolviendo el sistema de ecuaciones resultante. Y permite calcular el valor de un punto x dentro de la placa. Otorga también, la posibilidad de editar los valores de D, las condiciones de frontera y la distancia entre cada nodo.

3.2 Función Elemento

Esta función despliega en pantalla la matriz de rigidez de cada elemento. Cada matriz es calculada por el programa según la definición descrita en (2).

3.3 Función Global

Despliega la matriz de rigidez global, que se obtienen mediante la suma de las matrices de elementos considerando las posiciones de estas.

3.4 Función Valores Nodales

La función despliega en pantalla el valor de cada nodo. Cada valor es calculado a partir de las ecuaciones generadas en (4).

3.5 Función Conductividad

Esta función recibe un valor x y dependiendo de su ubicación, es decir, dentro de que elemento se encuentre, se calculará su valor considerando los nodos correspondientes a ese elemento. Si x no está dentro del rango definido, el programa termina la ejecución de ese método con un mensaje de advertencia.