

#Bibliotheca 002.2: Matematikçi Gibi Düşünmek II.Kısım: Mantıksal Nasıl Düşünülür?

Matematik ve Matematik Mühendisliği Topluluğu¹

¹Affiliation not available

December 7, 2020

Bu içeriğimizde Kevin Houston tarafından yazılmış ve Türkçeye Mehmet Terziler ile Tahsin Öner tarafından çevrilmiş olan Matematikçi Gibi Düşünmek adlı kitabın “Mantıksal Nasıl Düşünülür?” kısmının özeti yer alıyor. Lisans matematiği için bir kılavuz olarak belirtilen bu kitaptaki her başlığın temel kısımlarını kendi görsellerimizle derledik.

UYARI Bu özete dair tanım, teorem ve açıklamaların detayları halihazırda kitapta bulunmaktadır. Bu nedenle konuları daha detaylı öğrenmek, örneklerle pekiştirmek ve konularla ilgili alıştırma yapmak için lütfen kitaba başvurunuz.



Figure 1: Matematikçi Gibi Düşünmek kitabının ikinci kısmı, mantıksal düşünme konusunu incelemektedir.

Yazı İçeriği:

Açıklamada Bulunmak

Gerektirmeler

Gerektirmelerle İlgili İnce Noktalar

4 Ters Ve Denklik

Niceleyiciler: Her ve Bazı Niceleyicilerin Karmaşıklığı ve Değillemesi

Örnekler ve Karşıt Örnekler

Lojiğin Özeti

Referanslar

6. Bölüm: Açıklamada Bulunmak

Figure 2: Matematik, matematiksel önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu kanıtlama işidir.

“When dealing with people, let us remember we are not dealing with creatures of logic. We are dealing with creatures of emotion, creatures bristling with prejudices and motivated by pride and vanity.”

“İnsanlarla uğraşırken mantıklı varlıklarla uğraşmadığımızı hatırlayalım. Duygusal varlıklarla uğraşıyoruz; önyargılarla dolu, gurur ve

Dale Carnegie, How to Win Friends And Influence People

Bundan sonraki birkaç bölümde teknik konulardan çok matematikçilerin günlük çalışmalarında kullandıkları lojik üzerine yoğunlaşacağız.

Matematik, matematiksel önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu kanıtlama işidir. O halde önce önermelere bir göz atalım.

Önermeler

Tanım: Doğru ya da yanlış olan -ama ikisi birden değil- bir tümceye önerme denir. Örneğin: ‘x tektir.’

Tanımda önermenin hem doğru hem yanlış olamayacağı verilmiştir, bu önemli bir detaydır. Teknik dilde doğru ile yanlışın ortasına düşen bir şey düşüncesinin olabilirliğinin dışlandığı yasaya **ortanın dışlanması yasası** denir.

Önermeleri göstermek için harfler kullanılır: p, q, A...

Değilleme

*Tanım: Bir A önermesinin **değillemesi**, A doğru iken yanlış olan önermedir. Örneğin ‘x tektir’in değillemesi ‘x tek değildir.’ ya da ‘x çifttir’ olur.*

UYARI: *değil (değil (A))’nın önermesi A’dır.*

Doğruluk Çizelgeleri

Lojik öğrenirken doğruluk çizelgeleri son derece önemlidir, yeni başlayanlar için açıklık sağlayabilirler.

Ve / Ya Da

Lojikçiler ve'yi göstermek için $[?]$ sembolunu kullanırlar, yani A ve B önermesi A $[?]$ B olarak yazılır. A ya da B önermelerinden sadece biri yanlış olsa dahi A $[?]$ B önermesi yanlıştır. Önermenin doğru olması için her ikisinin de doğru olması gerekir.

Ya da bağlacının gösteriminde $[?]$ sembolu kullanılır. A ya da B önermesi, A $[?]$ B olarak yazılır. A $[?]$ B önermesinin yanlış olması için hem A'nın hem B'nin yanlış olması lazımdır.

Önermelerin Denklikleri

*Tanım: Girdilerin ve çıktıların oluşturduğu doğruluk çizelgeleri aynı olan iki önerme **denk önermelerdir**.*

Ve ile ya da'nın değillemeleri net bir simetriye sahiptir.

- “değil (A ve B)”, “(değil A) ya da (değil B)”ye denktir.
- “değil(A ya da B)” “(değil A) ve (değil B)”ye denktir.

7.Bölüm: Gerektirmeler¹

Figure 3: 1: Gerektirmelere bazen koşullular denir.

“Mathematics consists of propositions of the form: P implies Q , but you never ask whether P is true.”

“Matematik P 'nin Q 'yu gerektirdiği önermelerden oluşur ancak P 'nin doğru olup olmadığını asla sormazsınız.”

Bertrand Russell

“Eğer . . . , o zaman . . .” Önermeleri

Çoğu matematiksel önerme “Eğer A önermesi doğru ise, o zaman B önermesi doğrudur.” biçimlidir. Önermelerin bu tipine **gerektilme** denir. ‘A gerektirir B’ diye okunur ve ‘ $A = B$ ’ olarak yazılır.

Varsayım, Kabul ve Sonuç

Bir $A = B$ gerektirmesinde iki kısım vardır:

- A önermesine **varsayım** ya da **kabul** denir.
- B önermesine **sonuç** denir.

- Böylece “Eğer varsayım doğru ise, o zaman sonuç doğrudur.” denir.

$A = B$, A ya da B ’nin doğruluğu hakkında ya da onun dışında hiçbir şey söylemez! Yanlış önermeler, doğru önermeleri gerektirebilir.

- $A = B$ ’nin değillemesi, (değil (A) [$?$] B) ile denktir.
- $A = B$ ifadesi, “ B eğer A ise” ifadesi ve “ A ancak eğer B ise” ifadesiyle aynıdır.

8. Bölüm: Gerektirmelerle İlgili İnce Noktalar



Figure 4: Bu bölümde eğer / o zaman yapısının kullanımı ile günlük kullanımda rastlanabilen özel bir probleme göz atacağız.

“He’s suffering from politicians logic. Something must be done, this is something, therefore we must do it.”

“Politikacı mantığından muzdarip. Bir şeyler yapılmalı, bu bir şeydir, bu yüzden yapmalısınız.”

Antony Jay and Jonathan Lynn, Power to The People: Yes, Prime Minister

Evrik: Yaygın Bir Hata

‘Eğer A ise, o zaman B ’ gerektirmesinin evriği ‘Eğer değil(A) ise, o zaman değil(B)’dir.

‘ $A = B$ ’, ‘değil(A) = değil(B)’ye denk değildir.

Genelde, ‘ $A = B$ ’nin doğruluğu, evriğinin doğruluğu hakkında bir şey söylemez.

Gerekli ve Yeterli

*Tanım: Bir **gerekli** koşul, bir sonucun doğru olması için geçerli olması gereken bir koşuldur. Sonucun doğruluğunu garanti etmez.*

“A, B için gereklidir.” ifadesi, “B doğrudur ancak eğer A doğru ise” anlamına gelir. Bu da “ $B = A$ ” ile aynıdır.

*Tanım: Bir **yeterli** koşul, sonucun doğru olduğunu garanti eden bir koşuldur. Koşul sağlanmasa bile sonuç doğru olabilir.*

Başka bir deyişle “A, B için yeterlidir.” ifadesi, “B doğrudur eğer A doğru ise” anlamına gelir. Bu da “ $A = B$ ” ile aynıdır.

Karşıt Ters

“ $A = B$ ” önermesinin **karşıt tersi**, “ $\neg(B) = \neg(A)$ ” ifadesidir. Bu da “ $A = B$ ”ye denktir. Yani bir gerektirme ve karşıt tersi denktir.

9. Bölüm: Ters ve Denklik

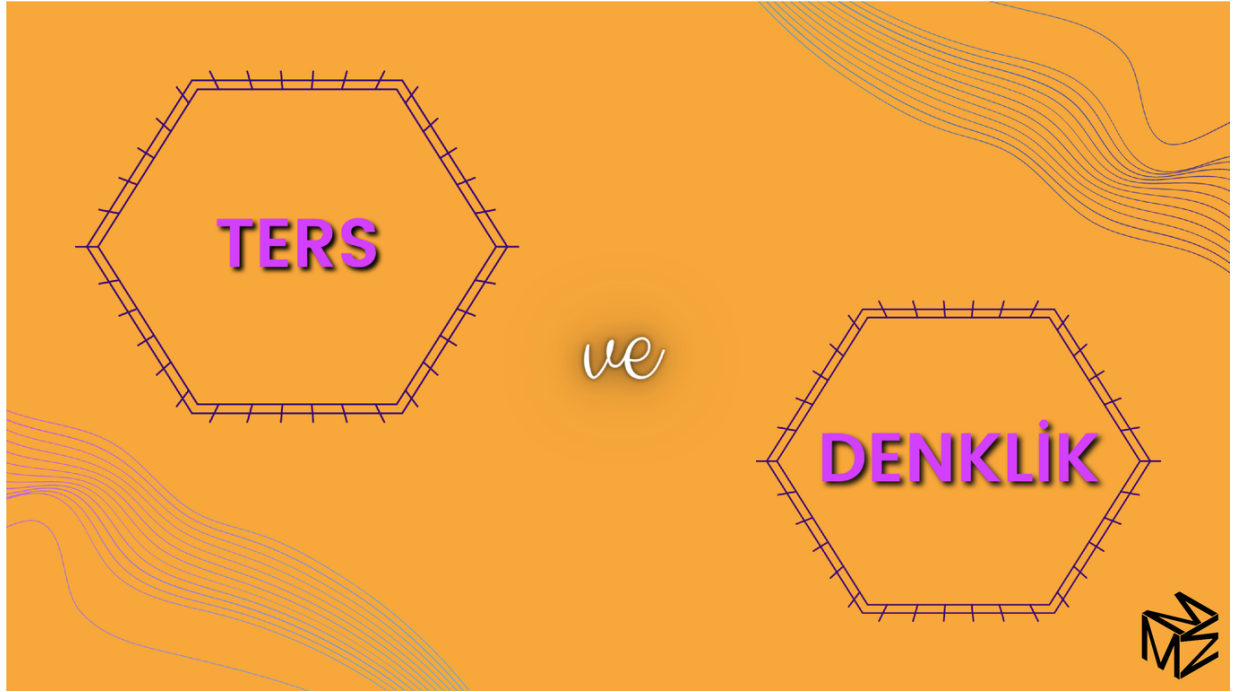


Figure 5: Bu bölümde önermelerin tersini ve denkliklerine göz atacağız.

“But the fact that some geniuses were laughed at does not imply that all who are laughed at are geniuses. They laughed at Columbus, they laughed at Fulton (steam-boat inventor), they laughed at the Wright brothers. But they also laughed at Bozo the Clown.”

“Bazı dahilere gülünmesi gerçeği, gülünen herkesin dahi olduğu anlamına gelmez. Columbus’a güldüler, Fulton’a (vapurun mucidi) gül-

Carl Sagan, Broca’s Brain

Ters

Tanım: “ $A = B$ ” önermesinin tersi “ $B = A$ ”dır.

Bir önerme ve tersi aynı değildir. Biri doğru olabilir, biri yanlış olabilir. İkisi doğru olabilir ya da ikisi yanlış olabilir.

Mantıksal Denklik

Tanım: Eğer “ $A = B$ ” ve “ $B = A$ ”nın ikisi de doğru ise, o zaman A ve B **mantıksal denk önermeler** denir ve “ $A == B$ ” ile gösterilir. $==$ işareti “**eğer ve ancak eğer**” olarak okunur ve önermeye **çift koşullu önerme** denir.

Özet

- A ve B önermelerini kullanarak değil ve $=$ ’yi dört yolla birleştirebiliriz:
 1. $A = B$
 2. $B = A$, tersi
 3. değil $A =$ değil B , evriği
 4. değil $B =$ değil A , karşıt tersi
- Eğer $A = B$ doğru ise, o zaman karşıt tersi doğrudur.
- Eğer $A = B$ doğru ise, o zaman tersi ve evriği doğru olabilir ya da yanlış olabilir.
- Eğer $A = B$ ve $B = A$ doğru ise, o zaman A ve B denktir ve $A == B$ yazılır.

10. Bölüm: Niceleyiciler: Her ve Bazı

Figure 6: “Ne kadar x vardır?”ın bir betimlemesini verdiğimiz için bu x ’lere bir değer atamadan söz ederiz, bu değerlere *niceleyiciler* denir.

“You can fool all the people some of the time, and some of the people all the time, but you cannot fool all the people all the time.”

“Tüm insanları bazen kandırabilirsiniz, bazı insanları her zaman kandırabilirsiniz, ancak tüm insanları her zaman kandıramazsınız.”

Abraham Lincoln

Her - Evrensel Niceleyici

Tanım: “Her” sözcüğü evrensel niceleyicidir. $[?]$ ile gösterilir.

Vardır - Varlıksal Niceleyiciler

Tanım: “Vardır” sözcüğü varlıksal niceleyicidir. [?] ile gösterilir.

Niceleyicilerin Birleştirilmesi

İki niceleyici birleştirilebilir ama sıra önemlidir.

11. Bölüm: Niceleyicilerin Karmaşıklığı ve Değillemesi

Figure 7: Niceleyici sayısı, bir önermenin karmaşıklığının kaba bir ölçüsüdür.

“Everything is simpler than you think and at the same time more complex than you imagine.”

“Her şey düşündüğünüzden daha basit ve aynı zamanda hayal ettiğinizden daha karmaşıktır.”

Johann Wolfgang von Goethe

Niceleyici sayısı, bir önermenin karmaşıklığının kaba bir ölçüsüdür. Bu karmaşıklığı gidermek için iki öneri vardır:

1. [?] x $P(x)$ 'i göstermek için, birinin size herhangi bir x verdiğini ve $P(x)$ 'i göstermeniz gerektiğini düşünün.
2. [?] x $P(x)$ 'i göstermek için, $P(x)$ 'i sağlayan herhangi bir x bulmanız gerekir.

Nicelenmiş bir P tümcesini değillemek için her [?]'yi [?]'ye ve her [?]'yi [?]'ya değiştirin ve P yerine değilini alın.

12. Bölüm: Örnekler ve Karşıt Örnekler



Figure 8: Kendi örneklerinizi oluşturun. Size bir önerme verildiğinde onun karşıt örneğini bulmaya çalışalım.

“Some facts can be seen more clearly by example than by proof.”

“Bazı gerçekler, kanıttan çok örneklerle daha net görülebilirler.”

Leonard Euler

“If I were wrong, one would be enough.”

“Eğer yanlış olsaydım sadece bir tanesi yeterli olurdu.”

Albert Einstein, Einstein’e Karşı Yüz Yazar kitabı hakkında

- Kendi örneklerinizi oluşturun: Bir probleme yanıt bulan bir yol verilmiş ise, onu ters çevirin ve “Hangi problem bu yanıtı verir?” diye sorun.
- İyi örnekler biriktirin.

Tanım: Bir önermenin yanlış olduğunu gösteren bir örneğe karşıt örnek denir.

- Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için sadece bir karşıt örneğe gereksinim duyulur.
- Her zaman bir önermenin yanlış olduğunu göstermeye çalışalım. Yani bir önerme verildiğinde bir karşıt örnek bulmaya çalışın.

13.Bölüm: Lojiğin Özeti



Figure 9: Matematiksel önermeler, lojik kullanılarak kanıtlanır.

A önermesi B önermesini gerektiriri yazma yollarının bir özeti

- A gerektirir B.
- A doğrudur gerektirir B doğrudur.
- $A = B$.
- Eğer A ise, o zaman B.
- Eğer A ise, B.
- B eğer A ise.
- A ancak eğer B ise.
- A, B için yeterlidir.
- B, A için gereklidir.
- Ya A yanlıştır ya da B doğrudur.

A önermesi B önermesine denktir yazmanın yolları

- A, B'ye denktir.
- $A == B$.
- A eğer ve ancak eğer B ise.
- A, B için gerekli ve yeterlidir.

Matematikçi Gibi Düşünmek kitabının diğer bölümlerinin özetleri ilerleyen haftalarda #Bibliotheca serimizle karşınızda olacak. **Kitap ile ilgili yorumlarınızı sosyal medya hesaplarımızdan bizlerle paylaşmayı**

unutmayın!

Instagram: [@mmmt_digital](#)

LinkedIn: [@mmmt-digital](#)

Twitter: [@mmmt_digital](#)

Matematikçi Gibi Düşünmek kitabının ilk kısmını incelediğimiz yazıya ulaşmak için tıkla: [LINK](#)

Yazımıza atıfta bulunmak için aşağıdaki gibi APA formatını kullanabilirsiniz:

MMMT. (2020, Aralık 7). *#Bibliotheca 002.2: Matematikçi Gibi Düşünmek II. Kısım: Mantıksal Nasıl Düşünülür?* - erişim tarihi - tarihinde, link adresinden erişildi.

Referanslar

[1] Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician*. (Mehmet Terziler ve Tahsin Öner, Çev.). Cambridge: Cambridge University Press.