#Bibliotheca 002.1: Matematikçi Gibi Düşünmek I. Kısım: Matematikçiler İçin Çalışma Becerileri

Matematik ve Matematik Mühendisliği Topluluğu¹

¹Affiliation not available

November 26, 2020

Bu içeriğimizde Kevin Houston tarafından yazılmış ve Türkçeye Mehmet Terziler ile Tahsin Öner tarafından çevrilmiş olan Matematikçi Gibi Düşünmek adlı kitabın “Matematikçiler İçin Çalışma Becerileri” kısmının özeti yer alıyor. Lisans matematiği için bir kılavuz olarak belirtilen bu kitaptaki her başlığın temel kısımlarını kendi görsellerimizle derledik.

UYARI Bu özete dair tanım, teorem ve açıklamaların detayları halihazırda kitapta bulunmaktadır. Bu nedenle konuları daha detaylı öğrenmek, örneklerle pekiştirmek ve konularla ilgili alıştırma yapmak için lütfen kitaba başvurunuz.

Figure 1: Matematikçi Gibi Düşünmek: Lisans Matematiği İçin Bir Kılavuz

Yazı İçeriği:

Kümeler ve Fonksiyonlar

Matematiği Okuma

Matematiği Yazma I

Matematiği Yazma II

Problemler Nasıl Çözülür

Referanslar

Figure 2: Matematikçi Gibi Düşünmek kitabının birinci bölümü, matematikçiler için önemli olan temel çalışma becerilerini konu almaktadır.

1. Bölüm: Kümeler ve Fonksiyonlar

“Everything starts somewhere, although many physicists disagree.”

“Pek çok fizikçi katılmıyor olsa da, her şey bir yerden başlar.”

Terry Pratchett, Hogfather

Bir matematikçi gibi düşünmek, üzerinde düşünülecek bir matematik gerektirir. Bu matematiğe sahip olduğumuza göre, bu bölüm kümeler ve fonksiyonlarla başlıyor. Kümeler ve fonksiyonlar, en temel matematiksel nesnelerdir, ama amaçlarımız için yeterince sorgulamaya sahiptirler.

Yüksek matematiğin tamamına yakın kısmı kümeler ve fonksiyonlar üzerinedir. Örneğin kalkülüs, gerçel sayılar kümesinden gerçel sayılar kümesine türevlenebilir özellikli fonksiyonların çalışmasıdır. Bu nedenle “Matematiğin yapı taşları kümeler ve fonksiyonlardır.” diyebiliriz.

Kümeler

Tanım: Bir küme, iyi-tanımlı nesneler topluluğudur.¹

Kümedeki nesnelere kümenin **elemanları** ya da **öğeleri** denir. Eğer x , X kümesinin bir elemanı ise o zaman " $x \in X$ " yazıyor ve " x , X 'in elemanıdır (ögesidir)" ya da " x , X 'dedir." olarak okuyoruz. Eğer x , X kümesinin bir elemanı değilse " $x \notin X$ " yazıyoruz.

1. Kümenin gerçek matematiksel tanımı çok daha karmaşıktır. Bu tanım sezgiseldir ve bize fazla sorun yaratmayacaktır.

Bazı İlginç Sayı Kümeleri

- Doğal Sayılar

Doğal sayıların kümesi $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 'dir ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Noktalar, sonsuza kadar devam edebileceğimiz anlamına gelir.

Bazı matematikçiler, özellikle lojikçiler, 0'ı doğal sayıların içine katarlar. Diğerleri ise doğal sayıların sayma sayıları olduğunu ve 0'dan başlayarak saymadığınızı söylerler. Öte yandan $0 \in \mathbb{N}$ alırsak bazı teoremler daha iyi ifade edilir. Bu tartışma negatif olmayan tamsayılarla ya da pozitif tamsayılarla çalışıldığı belirtilirse tatlıya bağlanabilir.

- Tam Sayılar

Tam sayıların kümesi $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ 'dir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}$ sembolü, Almanca'da *sayı* anlamına gelen *Zahlen* sözcüğünden gelir. Tüm doğal sayılar tam sayıdır.

- Rasyonel Sayılar

Rasyonel sayıların kümesi tüm kesirli sayılardan oluşur ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Yani p ve q tam sayılar ve $q \neq 0$ olmak üzere $x = p/q$ şeklinde yazılabiliyorsa $x \in \mathbb{Q}$ 'dir. Örneğin $1/2$, $6/1$, $80/5$ gibi. Ayrıca tüm tam sayılar rasyonel sayılardır çünkü $x \in \mathbb{Z}$, $x = x/1$ gibi yazılabilir.

- Gerçel Sayılar

$\mathbb{R}$ ile gösterilir. Gerçel sayıların katı tanımını yapmak zor olduğundan şimdilik bu sayıları ondalık temsil verilebilen herhangi bir sayı ya da sonsuz uzunluklu bir sayı doğrusu üzerinde bir nokta gibi temsil edilen bir sayı olarak kabul edelim.

Gerçel sayılar tüm rasyonel sayıları içerir. Ayrıca π ve e de gerçel sayılardır.² Rasyonel olmayan gerçel sayılara **irrasyonel sayılar** denir.

2. Bu savların kanıtı bu kitabın konusu dışındadır.

- Karmaşık Sayılar

-1'in karekökünün var olduğunu iddia ederek $\mathbb{C}$ ile gösterilen karmaşık sayıları tanımlayabiliriz. Karmaşık sayılar, kuramsal ve uygulamalı matematikte kullanılabilmektedir.

Kümeler Üzerine Ayrıntılar

- Boş Küme

Tanım: Hiç elemanı olmayan küme boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Matematikte en temel ve en tuhaf küme, hiç elemanı olmayan kümedir. Bu küme, bize sayma konusunda yardım eder ve matematiğin temelleri için vazgeçilmezdir.

Tanım: Elemanları aynı olan iki küme eşittir. X kümesi Y kümesine eşitse o zaman $X = Y$ yazılır. Değilse $X \neq Y$ yazılır.

Tanım: X kümesinin sonlu sayıda elemanı varsa o zaman X **sonlu** bir kümedir deriz. X sonlu ise eleman sayısına X 'in **kardinalitesi** denir ve $|X|$ ile gösterilir.

X 'in sonsuz sayıda elemanı varsa o zaman X 'in kardinalitesini tanımlamak zordur, çünkü sonsuzluğun farklı büyüklükleri vardır. Şimdilik sonsuz kümeler için kardinalitenin tanımsız olduğunu söyleyeceğiz.

Tanım: X 'in bir küme olduğunu varsayalım. Y 'nin her elemanı X 'in bir elemanı ise Y kümesi X 'in bir **alt kümesidir** ve $Y \subseteq X$ olarak yazılır.

UYARI Bir kümenin elemanı olmakla bir kümenin alt kümesi olmanın arasındaki farkı görmek çok önemlidir. $x \in X$ ise o zaman $\{x\} \subseteq X$ 'dir. Genellikle $x \in X$ ise o zaman $\{x\} \subseteq X$ 'dir. Ancak özel örneklerde bazen $\{x\} \subseteq X$ olur.

Tanım: Y, X 'e eşit değilse X 'in bir Y alt kümesine X 'in bir **öz alt kümesi** denir ve $Y \subset X$ ile gösterilir.

Kümeleri farklı bir notasyon kullanarak tanımlayabiliriz: $\{x \mid x, P \text{ özelliğini sağlar.}\}$ Bazen $\mid$ yerine $:$ da konulur ve bunlar 'öyle ki' gibi okunur.

Kümeler Üzerine İşlemler

- Kümelerin Birleşimleri

Tanım: X ve Y 'nin iki küme olduğunu varsayalım. X ve Y 'nin $X \cup Y$ ile gösterilen **birleşimi** X 'de ya da Y 'de ya da her ikisindeki elemanlardan oluşan kümedir.

Figure 3: X ve Y kümelerinin birleşimi $X \cup Y$ ile gösterilir.

- Kümelerin Ara Kesitleri

Tanım: X ve Y 'nin iki küme olduğunu varsayalım. X ve Y 'nin $X \cap Y$ ile gösterilen **ara kesiti** X 'de ve Y 'de olan elemanlardan oluşan kümedir.

Figure 4: X ve Y kümelerinin ara kesiti $X \cap Y$ ile gösterilir.

- Kümelerin Farkları

*Tanım: X ve Y'nin $X \setminus Y$ ile gösterilen **farkı**, X'de olan ama Y'de olmayan elemanların kümesidir. Eğer Y, X'in bir alt kümesi olarak tanımlanmışsa o zaman $X \setminus X \setminus Y$ 'ye Y'nin X'deki **tümleyeni** denir ve Y^c ile gösterilir.*

Figure 5: X ve Y kümelerinin farkı $X \setminus Y$ ile gösterilir.

- Kümelerin Çarpımları

Tanım: X ve Y iki küme olsun. X ve Y 'nin $X \times Y$ ile gösterilen **çarpımı**, $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere olası tüm (x, y) ikililerinin kümesidir. Yani, $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ and } y \in Y\}$ kumesidir.

Donüşümler ve Fonksiyonlar

Tanım: X ve Y 'nin küme olduklarını varsayalım. X 'den Y 'ye bir **fonksiyon** ya da **dönüşüm**, kümelerin elemanları arasındaki bir bağıdır. X 'in her elemanı için Y 'nin bir tek elemanı vardır.

Figure 6: Fonksiyonlar, kümelerin elemanları arasındaki bir bağıdır.

f , X 'den Y 'ye bir fonksiyon ise o zaman $f: X \rightarrow Y$ yazılır ve x 'e bağlanan Y 'deki tek eleman $f(x)$ olarak gösterilir. Bu elemana x 'in f altındaki değeri ya da f 'in bir değeri denir. X kümesine f 'in **tanım kümesi**, Y 'ye ise f 'nin **değer kümesi** denir.

Özet

- Bir küme, iyi-tanımlı nesneler topluluğudur.
- Boş kümenin hiç elemanı yoktur.
- Sonlu bir kümenin kardinalitesi kümenin eleman sayısıdır.
- Y 'nin her elemanı X 'de ise Y kümesi X 'in bir alt kümesidir.
- X 'in bir Y alt kümesi X 'e eşit değilse bir öz alt kümesidir.
- X ve Y 'nin birleşimi, X 'de ya da Y 'deki elemanların topluluğudur.
- X ve Y 'nin arakesiti, X 'de ve Y 'deki elemanların topluluğudur.
- X ve Y 'nin çarpımı, $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere tüm (x,y) ikililerinin kümesidir.
- Bir fonksiyon, bir kümenin elemanlarını bir diğerine atar.

2. Bölüm: Matematiği Okuma

Figure 7: Matematik nasıl okunur?

“Don’t believe everything you read.”

“Okuduğunuz her şeye inanmayın.”

Anonim

Aşağıdaki tavsiyeler sadece kitaplara değil, ders notları ve web sayfalarına yöneliktir.

Temel Okuma Önerileri

- Bir amaçla okuyun.
- Etkili okuyun. Elinizde kağıt kalem bulunsun.
- Sıra halinde okumayabilirsiniz ancak düzenli okuyun.
- Sorular sorun.
- Tanımları, teoremleri ve örnekleri önce okuyun. Kanıtlar sonra gelebilir.
- Formülleri vs. uygulayarak konunun doğruluğunu kontrol edin.
- Alıştırmaları ve problemleri yapın.
- Takıldıysanız ilerleyin.
- Bir özet yazın.
- İyi düşünün, ne öğrendiniz?

3. Bölüm: Matematik Yazma I

Figure 8: Matematik nasıl yazılır?

“We have a habit in writing articles published in scientific journals to make the work as finished as possible, to cover up all the tracks, to not worry about the blind alleys or describe how you had the wrong idea first, and so on. ”

“Bilimsel dergilerde yayınlanan makaleler yazarken çalışmayı olabildiğince bitmiş hale getirmek, tüm izleri örtmek, çıkmaz yollar hakkında endişe

Richard Feynman, Nobel Lecture, 1966.

Yazmak için birçok neden vardır. Bu nedenler ne olursa olsun etkin bir çalışma üretmek için pratik olmak gerekir. Yazmanızı nasıl iyileştireceğiniz üzerine yazılmış düşünceler toplamı aşağıda verilmiştir. Bir problemin yanıtını bulmakla onu sunmak arasındaki büyük fark kaydedilmelidir.

- Yalın, noktalı tunceler yazın.
- Yalınlığı koruyun.
- Ne yaptığınızı açıklayın.
- Savlarınızı açıklayın.
- Ne demek istediğinizi söyleyin ki hiçbir şey belirsiz kalmayın.
- Genellikle, sembollerden çok sözcükleri kullanın.
- Eşittir sembolünü doğru kullanın: Eşittir, eşittir demektir.
- Her yerde oklar çizmeyin: Denklemleri tanımak için semboller ya da sayılar kullanın.
- Ne yazdığınızı son bir kez okuyun.
- Derin düşünün, çalışmanıza yeni bir gözle bakın.

4. Bölüm: Matematik Yazma II

Bir önceki bölümde matematik yazmanın temel ilkeleriyle ilgilenmiştik. Bu bölümde daha kesin ve matematiğin sunumunu iyileştirmek için özel yöntemlere örnekler verilmiştir.

“Learn as much by writing as by reading.”

“Okuyarak öğrendiğiniz kadar yazarak da öğrenin.”

Lord Acton, Lectures on Modern History (1906)

- “Eğer” kelimesini kullanıyorsanız o zaman “o zaman” ifadesini kullanın.
- Her şey bir formül değildir. Şeyleri doğru isimleriyle adlandırın. Örneğin; $3x^2 - 7x$ bir *ifade*dir. $3x^2 - 7x = 5$ bir *denklem* ve $x \leq 5$ bir *eşitsizlik*dir.
- “O” sözcüğünü kullanmayın.
- Kuramsal matematikte ondalık yaklaşımlardan kaçın.
- Tümcelere bir sembolle başlamayın.³
- = gerektirme sembolünü doğru kullanın. Bu sembol eşittir işareti ile aynı işlevde kullanılmamalıdır. Doğru kullanım *önerme = önerme*’dir.
- Ortak sembolleri ve notasyonu kullanın ve onları önce tanımlayın.
- Bağlantılı tümcecik ve eş anlamlı sözcükleri kullanın.

3. Bu öğüt Türkçe yazmalarda geçerli değildir.

5. Bölüm: Problemler Nasıl Çözülür

Figure 9: Polya'nın dört-adım planı problem çözümü için iyi bir yoldur.

“It isn’t that they can’t see the solution. It is that they can’t see the problem.”

“Çözümü göremedikleri için değil. Problemi göremedikleri için.”

G.K. Chesterton, The Scandal of Father Brown – The Point of a Pin

Problemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmenin en iyi yolu problem çözmektir, tecrübe önemlidir. Bunu söylememize rağmen problem çözerken uygulanabilecek yararlı uyarılar vardır. Polya’nın dört-adım planı bir problemi çözmek için iyi bir yoldur.

Polya’nın dört-adım planı ve matematikteki uygulamaları üzerine hazırladığımız yazımıza buradan ulaşabilirsiniz: #Pergamon 001: Polya’nın Problem Çözme Algoritması

Matematikçi Gibi Düşünmek kitabının diğer bölümlerinin özetleri ilerleyen haftalarda #Bibliotheca serimizle karşınızda olacak. **Kitap ile ilgili yorumlarınızı sosyal medya hesaplarımızdan bizlerle paylaşmayı unutmayın!**

Instagram: @mmmt-digital

LinkedIn: @mmmt-digital

Twitter: @mmmt-digital

Yazımıza atıfta bulunmak için aşağıdaki gibi APA formatını kullanabilirsiniz:

MMMT. (2020, Kasım 20). *#Bibliotheca 002: Matematikçi Gibi Düşünmek I. Kısım: Matematikçiler İçin Düşünme Becerileri* - erişim tarihi - tarihinde,
www.authorea.com/494124/c-ppSekz4kHZSKr2C8ZDGg adresinden erişildi.

Referanslar

[1] Houston, K.(2009). *How to Think Like a Mathematician*. (Mehmet Terziler ve Tahsin Öner, Çev.). Cambridge: Cambridge University Press.